Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

CCS bisimulazione forte-11.4.3-11.5

CCS: sintassi

$$
\begin{array}{rcll}
p, q & ::= & \mathbf{nil} & \text{processo inattivo} \\
 & | & x & \text{variabile di processo (per la ricorsione)} \\
 & | & \mu.p & \text{prefisso azione} \\
 & | & p\backslash\alpha & \text{canale ristretto} \\
 & | & p[\phi] & \text{rietichettatura del canale} \\
 & | & p + q & \text{scelta nondeterministica (somma)} \\
 & | & p|q & \text{composizione parallela} \\
 & | & \mathbf{rec}\ x.\ p & \text{ricorsione}
\end{array}
$$

(gli operatori sono elencati in ordine di precedenza)

CCS semantica operazionale

Act) $$\frac{}{\mu.p \xrightarrow{\mu} p}$$

Res) $$\frac{p \xrightarrow{\mu} q \quad \mu \notin \{\alpha, \overline{\alpha}\}}{p\backslash\alpha \xrightarrow{\mu} q\backslash\alpha}$$

Rel) $$\frac{p \xrightarrow{\mu} q}{p[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu)} q[\phi]}$$

SumL) $$\frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q}$$

SumR) $$\frac{p_2 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q}$$

ParL) $$\frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q_1}{p_1|p_2 \xrightarrow{\mu} q_1|p_2}$$

Com) $$\frac{p_1 \xrightarrow{\lambda} q_1 \quad p_2 \xrightarrow{\overline{\lambda}} q_2}{p_1|p_2 \xrightarrow{\tau} q_1|q_2}$$

ParR) $$\frac{p_2 \xrightarrow{\mu} q_2}{p_1|p_2 \xrightarrow{\mu} p_1|q_2}$$

Rec) $$\frac{p[^{\mathbf{rec}\ x.\ p}/_{x}] \xrightarrow{\mu} q}{\mathbf{rec}\ x.\ p \xrightarrow{\mu} q}$$

Gioco della bisimulazione

Il gioco della bisimulazione

due processi p,q e due giocatori uno contro l’altro

Alice, l'attaccante, mira a dimostrare che p e q non sono equivalenti

Bob, il difensore, mira a dimostrare che p e q sono equivalenti

il gioco è a turni, ad ogni turno:

Alice sceglie un processo e una delle sue transizioni in uscita

Bob deve rispondere con una transizione del processo equivalente, l'etichetta della transizione scelta deve essere uguale a quella scelta da Alice

al prossimo turno, nel caso ci sia, i giocatori considereranno l’equivalenza dei processi a cui sono arrivati

Il gioco della bisimulazione

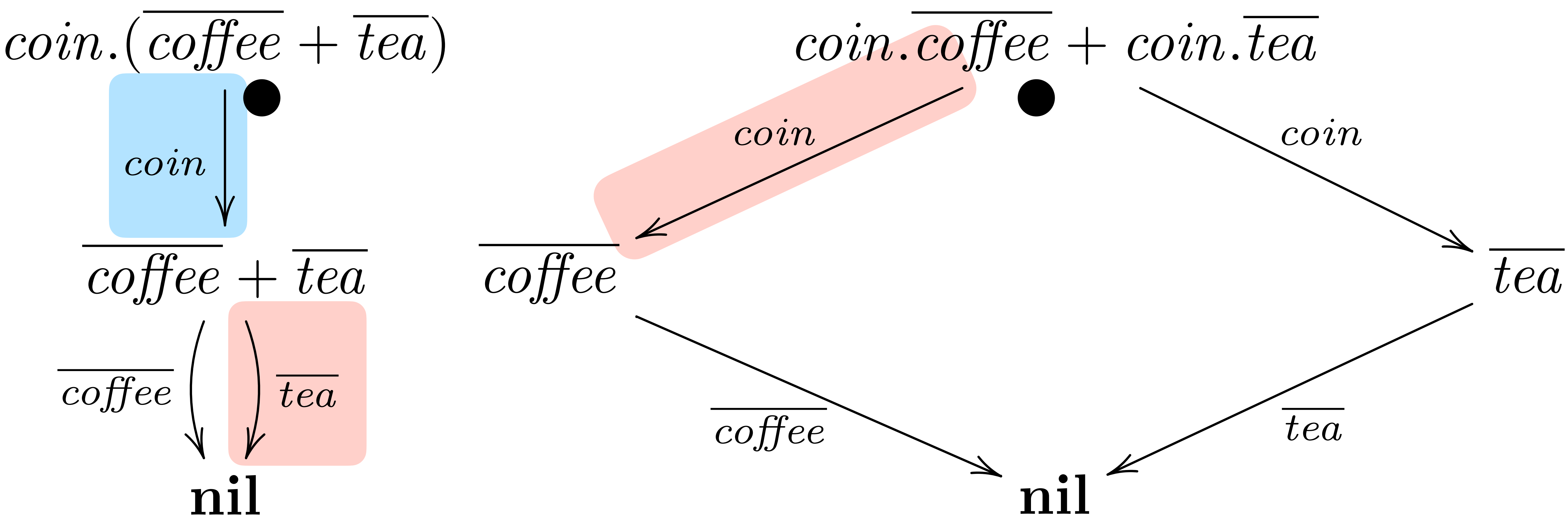
Alice vince se, ad un certo punto,
può fare una mossa che Bob non può fare

Bob vince in tutti gli altri casi
- se Alice non riesce a trovare una mossa
- se il gioco non termina

Alice ha una strategia vincente
se può fare una mossa che Bob non può fare;
o se può fare una mossa che non importa cosa risponde Bob,
al prossimo turno lei vince
o così via dopo un qualsiasi numero (finito) di mosse…

Alice ha una strategia vincente se può confutare
l'equivalenza di p e q in un numero finito di mosse

Il gioco della bisimulazione



Alice gioca $\quad coin.\overline{coffee} + coin.\overline{tea} \xrightarrow{coin} \overline{coffee}$

Bob puo' rispondere $\quad coin.(\overline{coffee} + \overline{tea}) \xrightarrow{coin} \overline{coffee} + \overline{tea}$

Alice gioca $\quad \overline{coffee} + \overline{tea} \xrightarrow{\overline{tea}} \mathbf{nil}$

Bob non puo' rispondere $\quad \overline{coffee} \not\xrightarrow{\overline{tea}}$

Alice vince!

CCS
Strong bisimulation

Bisimulazione forte

la nozione di bisimulazione non è limitata ai processi CCS

si applica a qualsiasi LTS

di seguito ricordiamo la definizione originale di Milner di *relazione di bisimulazione forte*

da tenere a mente

ci sono molte relazioni di bisimulazione forti

siamo interessati alla più grande relazione di questo tipo, chiamata *bisimilarità forte*

per dimostrare che due processi sono fortemente bisimili è sufficiente mostrare che sono legati da una bisimulazione forte

Bisimulazione forte

$\mathcal{P}$ insieme di processi

$\mathbf{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ una relazione binaria

scriviamo $p \mathbf{R} q$ quando $(p,q) \in \mathbf{R}$

$\mathbf{R}$ e' una bisimulazione forte se

$$\forall p, q.\ (p,q) \in \mathbf{R} \boxed{\Rightarrow} \begin{cases} \forall \mu, p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \quad \Rightarrow \quad \exists q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \mathbf{R}\, q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \quad \Rightarrow \quad \exists p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \mathbf{R}\, q' \end{cases}$$

iintuitivamente: se due processi sono in relazione, allora per qualsiasi mossa di Alice, Bob può trovare una mossa che porta a processi in relazione, cioè, Bob ha una strategia vincente

Esempio

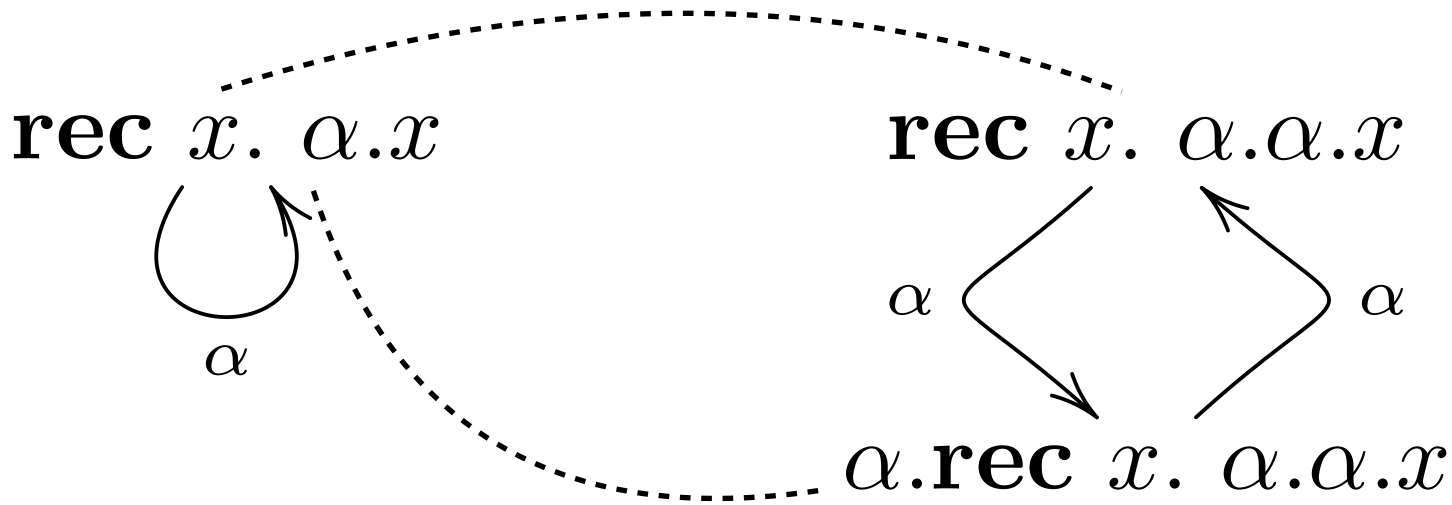
$\emptyset$ e' una bisimulazione forte

$Id \triangleq \{(p,p) \mid p \in \mathcal{P}\}$ e' una bisimulazione forte

ogni isomorfismo tra grafi definisce una bisimulazione forte

$$\mathbf{R}_f \triangleq \{(p, f(p))\}$$

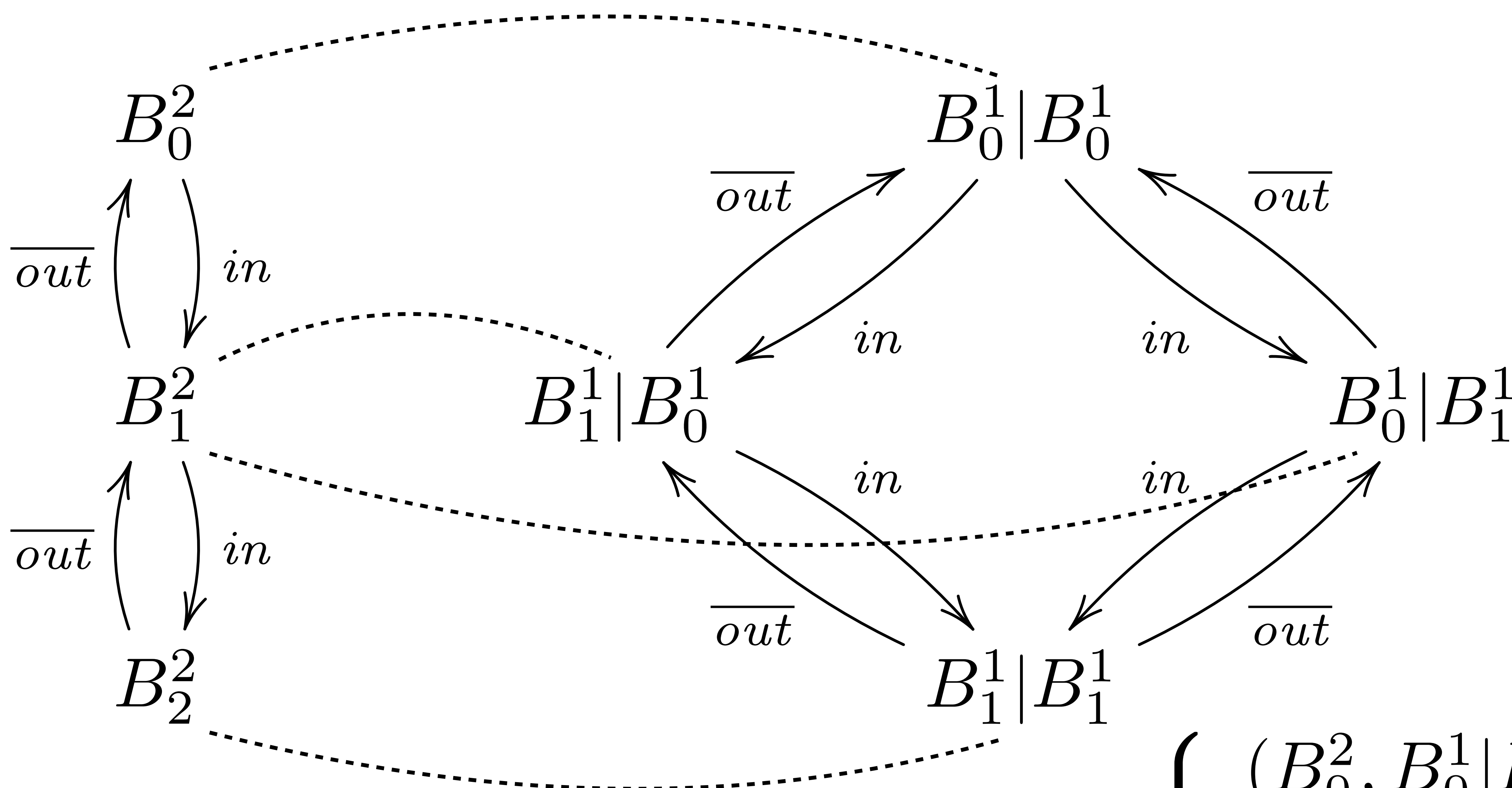
Esempio



$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.x, \mathbf{rec}\ x.\ \alpha.\alpha.x), \\ (\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.x, \alpha.\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.\alpha.x) \end{array} \right\}$$

a differenza degli isomorfismi tra grafi,
lo stesso processo può essere in relazione con molti processi

Esempio



$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B_0^2, B_0^1|B_0^1), \\ (B_1^2, B_1^1|B_0^1), \\ (B_1^2, B_0^1|B_1^1), \\ (B_2^2, B_1^1|B_1^1) \end{array} \right\}$$

Unione

Lemma Se $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ sono bisimulazioni forti,
allora $\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ e' una bisimulazione forte

prova. prendiamo $(p, q) \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

se $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

dal momento che $(p, q) \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$ abbiamo $p \; \mathbf{R}_i \; q$ per qualche $i \in \{1, 2\}$

dal momento che $\mathbf{R}_i$ e' una bisimulazione forte e $p \xrightarrow{\mu} p'$

abbiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \; \mathbf{R}_i \; q'$ e quindi $(p', q') \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

se $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$

analogo al caso precedente

Inversa

Lemma Se $\mathbf{R}$ e' una bisimulazione forte,
allora $\mathbf{R}^{-1} \triangleq \{(q,p) \mid p \; \mathbf{R} \; q\}$ e' una bisimulazione forte,

prova. prendiamo $(q,p) \in \mathbf{R}^{-1}$

se $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $(q',p') \in \mathbf{R}^{-1}$

dal momento che $(q,p) \in \mathbf{R}^{-1}$ abbiamo $p \; \mathbf{R} \; q$

dal momento che $\mathbf{R}$ e' una bisimulazione forte e $q \xrightarrow{\mu} q'$

abbiamo $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $p' \; \mathbf{R} \; q'$ e per questo $(q',p') \in \mathbf{R}^{-1}$

se $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(q',p') \in \mathbf{R}^{-1}$

analogo al caso precedente

Composizione

Lemma Se $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ sono bisimulazioni forti,
allora $\mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \triangleq \{(p,q) \mid \exists r.\ p\ \mathbf{R}_1\ r \wedge r\ \mathbf{R}_2\ q\}$
e' una bisimulazione forte

prova. prendiamo $(p,q) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

se $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p',q') \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

dal momento che $(p,q) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$ abbiamo $p\ \mathbf{R}_1\ r \wedge r\ \mathbf{R}_2\ q$ per qualche r

dal momento che $\mathbf{R}_1$ e' una bisimulazione forte e $p \xrightarrow{\mu} p'$

abbiamo $r \xrightarrow{\mu} r'$ con $p'\ \mathbf{R}_1\ r'$

dal momento che $\mathbf{R}_2$ e' una bisimulazione forte e $r \xrightarrow{\mu} r'$

abbiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $r'\ \mathbf{R}_2\ q'$ e percio' $(p',q') \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

se $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $(p',q') \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$

analogo al caso precedente

Notazione

$$\mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \triangleq \{(p,q) \mid \exists r.\ p \ \mathbf{R}_1 \ r \wedge r \ \mathbf{R}_2 \ q\}$$

qualche volta scritto come

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$$

CCS
Bisimilarita' forte

Bisimilarita' forte

$\simeq$

spesso indicato $\sim$ in letteratura

usiamo $\simeq$ per sottolineare che è una congruenza

$p \simeq q \quad \text{sse} \quad \exists \mathbf{R}$ una bisimulazione forte tale che $(p, q) \in \mathbf{R}$

cioè Bob ha una strategia vincente

$$\simeq \quad \triangleq \quad \bigcup_{\mathbf{R} \text{ è una b.f.}} \mathbf{R}$$

la bisimilarità forte e' una relazione di equivalenza?

Relazione di equivalenza

$\equiv$

Riflessiva	$\forall p \in \mathcal{P}$	$p \equiv p$
Simmetrica	$\forall p, q \in \mathcal{P}$	$p \equiv q \Rightarrow q \equiv p$
Transitiva	$\forall p, q, r \in \mathcal{P}$	$p \equiv q \wedge q \equiv r \Rightarrow p \equiv r$

Equivalenza indotta

Qualsiasi relazione $\mathbf{R}$ induce una relazione di equivalenza $\equiv_{\mathbf{R}}$

$\equiv_{\mathbf{R}}$ è la più piccola equivalenza che contiene $\mathbf{R}$

$$\frac{p \; \mathbf{R} \; q}{p \equiv_{\mathbf{R}} q} \qquad \frac{}{p \equiv_{\mathbf{R}} p} \qquad \frac{p \equiv_{\mathbf{R}} q}{q \equiv_{\mathbf{R}} p} \qquad \frac{p \equiv_{\mathbf{R}} q \quad q \equiv_{\mathbf{R}} r}{p \equiv_{\mathbf{R}} r}$$

Lemma se $\mathbf{R}$ e' una bisimulazione forte,

allora $\equiv_{\mathbf{R}}$ e' bisimulazione forte

Partizione indotta

Ogni relazione di equivalenza induce una partizione dei processi in classi di equivalenza

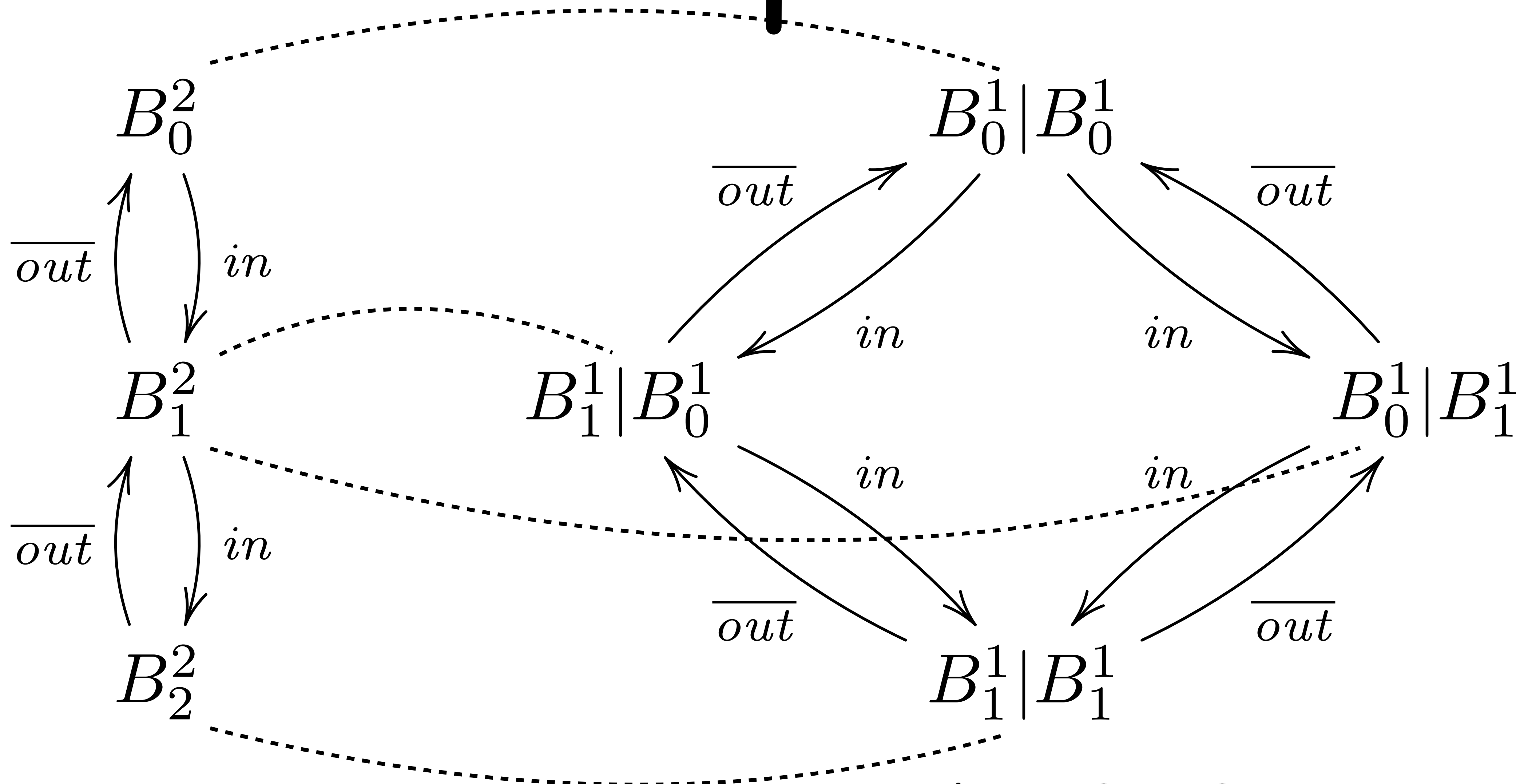
$$[p]_{\equiv} = \{q \mid p \equiv q\}$$

se $\equiv_{\mathbf{R}}$ e' una bisimulazione forte

$$q \in [p]_{\equiv_{\mathbf{R}}} \wedge p \xrightarrow{\mu} p' \;\Rightarrow\; \exists q' \in [p']_{\equiv_{\mathbf{R}}}.\; q \xrightarrow{\mu} q'$$

invece di elencare tutte le coppie di $\equiv_{\mathbf{R}}$
elenchiamo solo le sue classi di equivalenza

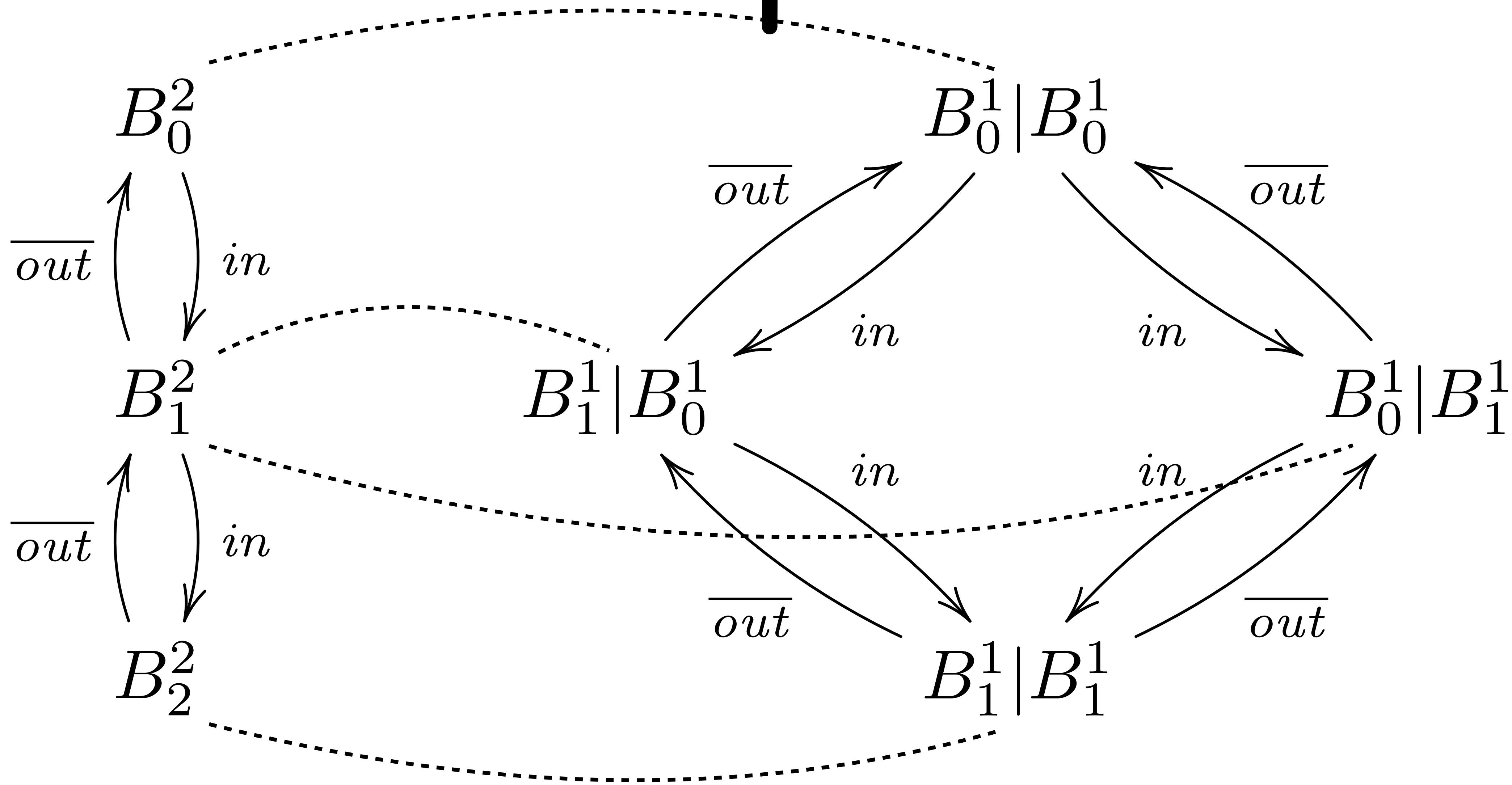
Esempio



$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B^2_0, B^1_0|B^1_0), \\ (B^2_1, B^1_1|B^1_0), \\ (B^2_1, B^1_0|B^1_1), \\ (B^2_2, B^1_1|B^1_1) \end{array} \right\}$$

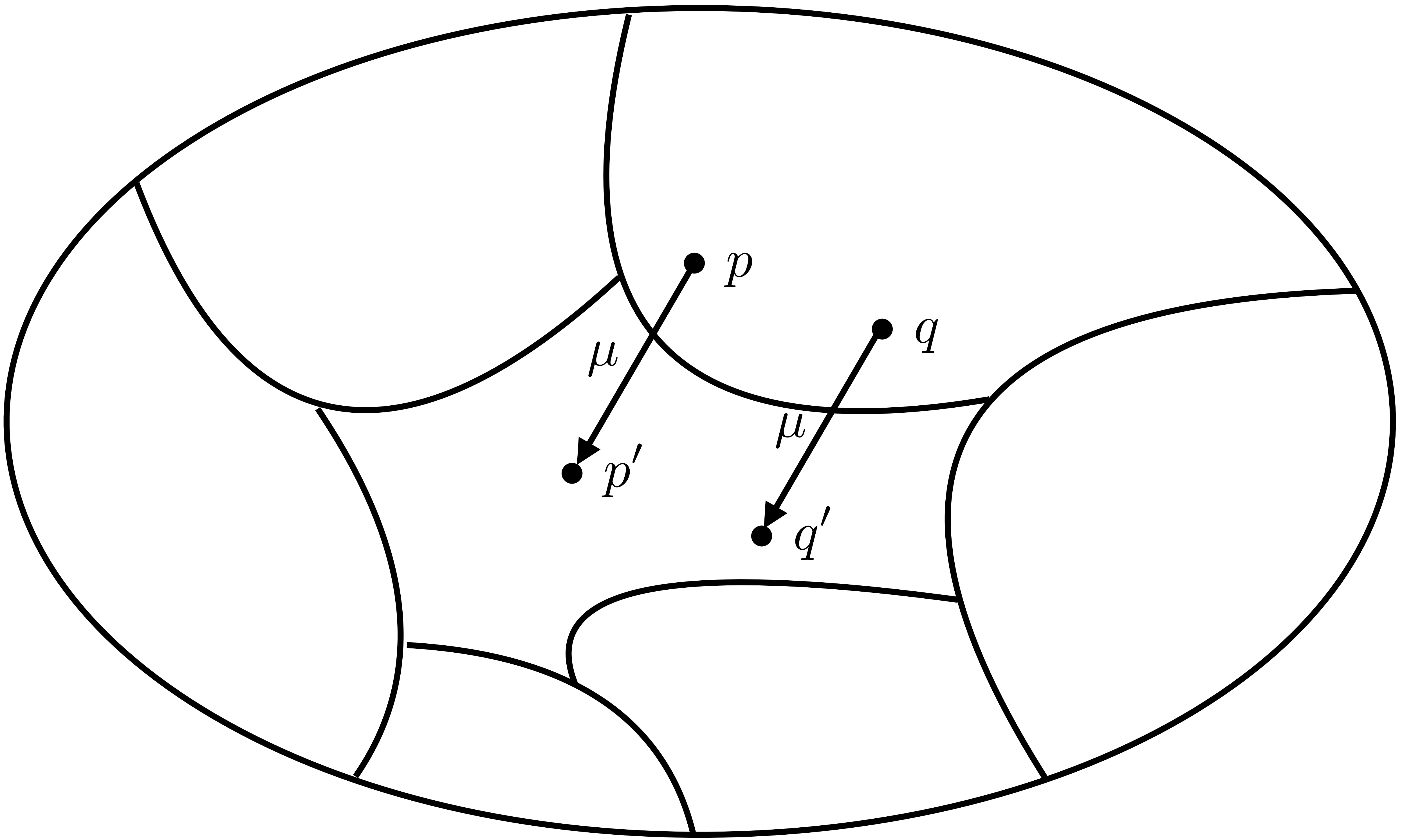
$$\equiv_{\mathbf{R}} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B^2_0, B^2_0), \\ (B^2_0, B^1_0|B^1_0), \\ (B^1_0|B^1_0, B^2_0), \\ (B^1_0|B^1_0, B^1_0|B^1_0), \\ (B^2_1, B^2_1), \\ \dots \end{array} \right\}$$

Esempio

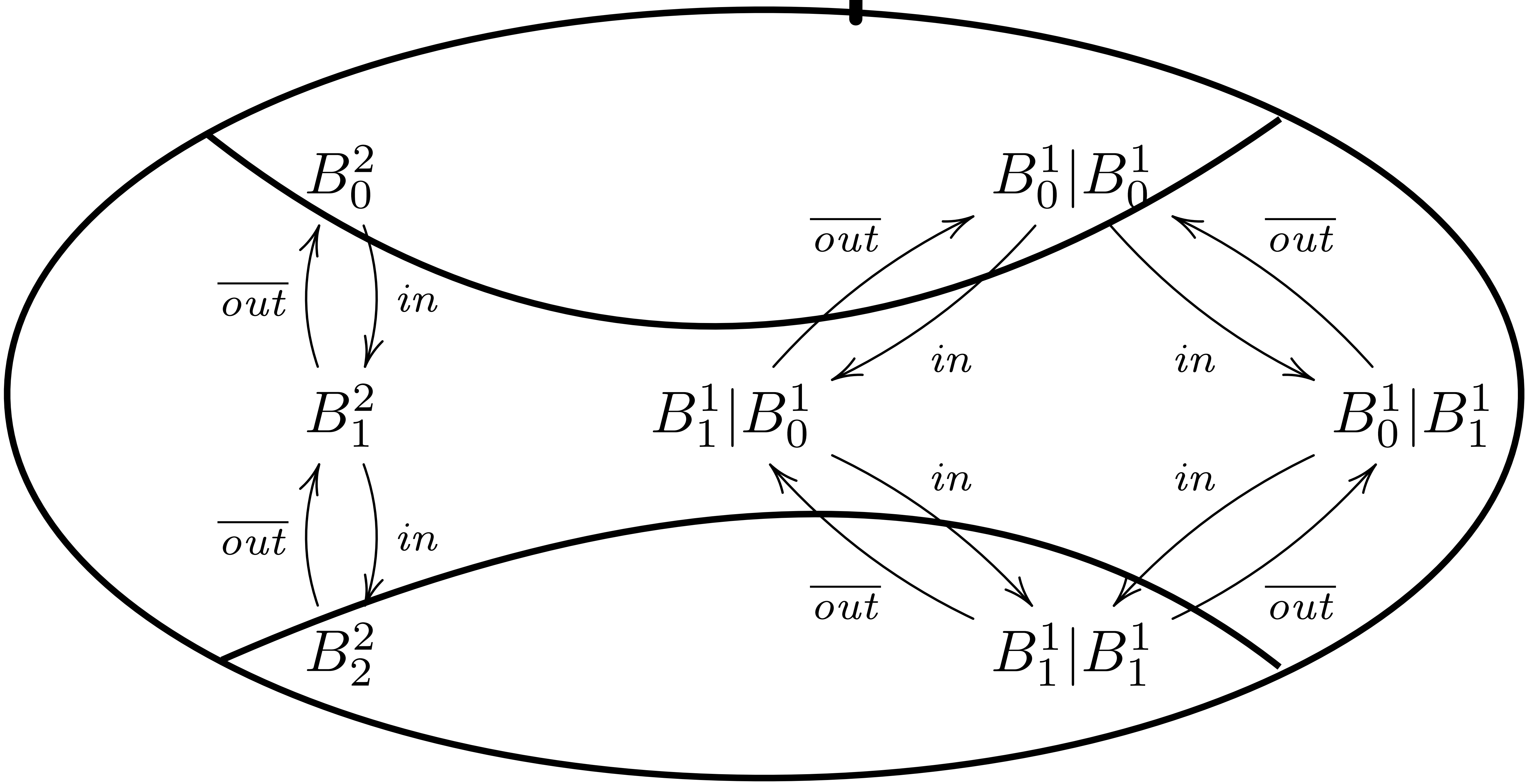


$$\mathbf{R} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} (B_0^2, B_0^1|B_0^1), \\ (B_1^2, B_1^1|B_0^1), \\ (B_1^2, B_0^1|B_1^1), \\ (B_2^2, B_1^1|B_1^1) \end{array} \right\} \qquad \equiv_{\mathbf{R}} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \{B_0^2, B_0^1|B_0^1\}, \\ \{B_1^2, B_0^1|B_1^1, B_1^1|B_0^1\}, \\ \{B_2^2, B_1^1|B_1^1\} \end{array} \right\}$$

Controllo di bisimulazione



Esempio



$$\equiv_{\mathbf{R}} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \{B_0^2, B_0^1|B_0^1\}, \\ \{B_1^2, B_0^1|B_1^1, B_1^1|B_0^1\}, \\ \{B_2^2, B_1^1|B_1^1\} \end{array} \right\}$$

TH. la bisimilarita' forte e' una relazione di equivalenza

proof.

riflessiva $Id \subseteq \simeq$

simmetrica assumiamo $p \simeq q$ vogliamo provare $q \simeq p$

$p \simeq q$ significa che esiste una b.f. $\mathbf{R}$ con $(p, q) \in \mathbf{R}$

allora $(q, p) \in \mathbf{R}^{-1}$ e $\mathbf{R}^{-1}$ e' una b.f.

quindi $(q, p) \in \mathbf{R}^{-1} \subseteq \simeq$ cioe' $q \simeq p$

transitiva assumiamo $p \simeq q$ $q \simeq r$ vogliamo provare $p \simeq r$

$p \simeq q$ significa che c'e' una b.f $\mathbf{R}_1$ con $(p, q) \in \mathbf{R}_1$

$q \simeq r$ significa che c'e' una b.f $\mathbf{R}_2$ con $(q, r) \in \mathbf{R}_2$

allora $(p, r) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1$ e' una b.f.

allora $(p, r) \in \mathbf{R}_2 \circ \mathbf{R}_1 \subseteq \simeq$ cioe' $p \simeq r$

TH. La bisimilarita' forte e' una bisimulazione forte

prova.

prendiamo $p \simeq q$

prendiamo $p \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \simeq q'$

$p \simeq q$ significa che c'e' una $\mathbf{R}$ con $(p, q) \in \mathbf{R}$

dal momento che $\mathbf{R}$ e' una bisimulazione forte e $p \xrightarrow{\mu} p'$

abbiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

dal momento che $\mathbf{R} \subseteq \simeq$ abbiamo $p' \simeq q'$

prendiamo $q \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $p' \simeq q'$

segue dal caso precedente (la bisimilarita' forte e' simmetrica)

Cor. la bisimilarita' forte e' **la piu' grande** bisimulazione

proof.

la bisimilarita' forte e' una bisimulazione forte (TH. prec.)

per definizione

$$\simeq \;\triangleq\; \bigcup_{\mathbf{R}\ \mathrm{s.b.}} \mathbf{R}$$

ogni altra bisimulazione forte e' inclusa in $\simeq$

TH. Definizione ricorsiva di bisimilarita' forte

$$\forall p, q.\ p \simeq q \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \mu, p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \quad \Rightarrow \quad \exists q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \simeq q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \quad \Rightarrow \quad \exists p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \simeq q' \end{cases}$$

prova.

$\Rightarrow)$ segue immediatamente perché $\simeq$ è una bisimulazione forte

$\Leftarrow)$ prendi *p,q* t.c. $\begin{cases} \forall \mu, p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \quad \Rightarrow \quad \exists q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \simeq q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \quad \Rightarrow \quad \exists p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \simeq q' \end{cases}$

vogliamo provare $p \simeq q$

si fa provando che $\mathbf{R} \triangleq \{(p, q)\} \cup \simeq$ e' una b.f.

TH. Definizione ricorsiva di bisimilarita' forte

$$\mathbf{R} \triangleq \{(p,q)\} \cup \simeq \quad \text{e' una b.f.}$$

prendiamo $(r,s) \in \mathbf{R}$

se $r \xrightarrow{\mu} r'$ vogliamo trovare $s \xrightarrow{\mu} s'$ con $(r',s') \in \mathbf{R}$

se $r \simeq s$ troviamo $s \xrightarrow{\mu} s'$ con $(r',s') \in \simeq \subseteq \mathbf{R}$

perche' $\simeq$ e' una bisimulazione

se $(r,s) = (p,q)$ allora $p \xrightarrow{\mu} r'$ e $\begin{cases} \forall \mu, p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \quad \Rightarrow \quad \exists q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \wedge p' \simeq q' \\ \wedge \\ \forall \mu, q'.\ q \xrightarrow{\mu} q' \quad \Rightarrow \quad \exists p'.\ p \xrightarrow{\mu} p' \wedge p' \simeq q' \end{cases}$

percio' troviamo $q \xrightarrow{\mu} s'$ con $(r',s') \in \simeq \subseteq \mathbf{R}$

se $s \xrightarrow{\mu} s'$ vogliamo trovare $r \xrightarrow{\mu} r'$ con $(r',s') \in \mathbf{R}$

analogo al caso precedente

CCS
Composizionalita'

Composizionalita’

ricordate che $\equiv$ e’ una congruenza quando

$$\forall \mathbb{C}[\cdot].\ \forall p, q.\ \boxed{p \equiv q \ \Rightarrow\ \mathbb{C}[p] \equiv \mathbb{C}[q]}$$

possiamo sostituire processi equivalenti in qualsiasi contesto
senza cambiare la semantica astratta

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

1. $\forall p, q.\ p \simeq q \ \Rightarrow\ \forall \mu.\ \mu.p \simeq \mu.q$
2. $\forall p, q.\ p \simeq q \ \Rightarrow\ \forall \alpha.\ p\backslash\alpha \simeq q\backslash\alpha$
3. $\forall p, q.\ p \simeq q \ \Rightarrow\ \forall \phi.\ p[\phi] \simeq q[\phi]$
4. $\forall p_0, q_0, p_1, q_1.\ p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \ \Rightarrow\ p_0 + p_1 \simeq q_0 + q_1$
5. $\forall p_0, q_0, p_1, q_1.\ p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \ \Rightarrow\ p_0 | p_1 \simeq q_0 | q_1$

omettiamo la quantificazione per rendere la dichiarazione più leggibile

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

1. $p \simeq q \;\Rightarrow\; \mu.p \simeq \mu.q$
2. $p \simeq q \;\Rightarrow\; p\backslash\alpha \simeq q\backslash\alpha$
3. $p \simeq q \;\Rightarrow\; p[\phi] \simeq q[\phi]$
4. $p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \;\Rightarrow\; p_0 + p_1 \simeq q_0 + q_1$
5. $p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1 \;\Rightarrow\; p_0|p_1 \simeq q_0|q_1$

tecnica di prova:
"indovinare" una relazione abbastanza grande da contenere tutte le coppie di interesse;
mostrare che è una relazione di bisimulazione;
allora è contenuta nella relazione di bisimilarità forte

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

$$\text{Rel)}\ \frac{p \xrightarrow{\mu} q}{p[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu)} q[\phi]}$$

prendi $\mathbf{R} \triangleq \{(p[\phi], q[\phi]) \mid p \simeq q\}$

mostriamo che $\mathbf{R}$ è una relazione di bisimulazione forte

prendi $(p[\phi], q[\phi]) \in \mathbf{R}$ (abbiamo $p \simeq q$)

prendi $p[\phi] \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q[\phi] \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

per la regola rel) deve essere $p \xrightarrow{\mu'} p''$ $\mu = \phi(\mu')$ $p' = p''[\phi]$

dal momento che $p \simeq q$ allora $q \xrightarrow{\mu'} q''$ con $p'' \simeq q''$

per la regola rel) $q[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu')} q''[\phi]$

prendi $q' = q''[\phi]$ cosi' che $(p', q') = (p''[\phi], q''[\phi]) \in \mathbf{R}$

prendi $q[\phi] \xrightarrow{\mu} q'$ vogliamo trovare $p[\phi] \xrightarrow{\mu} p'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

analogo al caso precedente

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

prendi $\mathbf{R} \triangleq \{(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \mid p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1\}$

mostriamo che $\mathbf{R}$ è una relazione di bisimulazione forte

prendi $(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \in \mathbf{R}$ (cioe' $p_0 \simeq q_0$ $p_1 \simeq q_1$)

prendi $p_0 + p_1 \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

se la regola suml) e' stata usata: $p_0 \xrightarrow{\mu} p'$

dal momento che $p_0 \simeq q_0$ allora $q_0 \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \simeq q'$

per la regola suml) $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$

ma purtroppo $(p', q') \in \simeq$ non necessariamente implica

$(p', q') \in \mathbf{R}$

come possiamo riparare la prova?

TH. La bisimilarita' forte e' una congruenza

SumL) $\dfrac{p_1 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q}$

$$\mathbf{R} \triangleq \{(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \mid p_0 \simeq q_0 \wedge p_1 \simeq q_1\} \boxed{\cup \simeq}$$

mostriamo che $\mathbf{R}$ è una relazione di bisimulazione forte

prendi $(p_0 + p_1, q_0 + q_1) \in \mathbf{R}$ (cioe' $p_0 \simeq q_0$ $p_1 \simeq q_1$)

prendi $p_0 + p_1 \xrightarrow{\mu} p'$ vogliamo trovare $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$ con $(p', q') \in \mathbf{R}$

se la regola suml) e' stata usata: $p_0 \xrightarrow{\mu} p'$

dal momento che $p_0 \simeq q_0$ allora $q_0 \xrightarrow{\mu} q'$ con $p' \simeq q'$

per la regola suml) $q_0 + q_1 \xrightarrow{\mu} q'$

ma purtroppo $(p', q') \in \simeq$ non necessariamente implica $(p', q') \in \mathbf{R}$

come possiamo riparare la prova?

(non c'e' bisogno di controllare le coppie in $\simeq$)

CCS: alcune regole

$$p + \mathbf{nil} \simeq p$$

$$p + q \simeq q + p$$

$$p + (q + r) \simeq (p + q) + r$$

$$p + p \simeq p$$

$$p|\mathbf{nil} \simeq p$$

$$p|q \simeq q|p$$

$$p|(q|r) \simeq (p|q)|r$$

Come dimostrarle? Trovare una bisimulazione forte per ciascuna di esse

$$\mathbf{nil}\backslash\alpha \simeq \mathbf{nil}$$

$$(\mu.p)\backslash\alpha \simeq \mathbf{nil} \quad \text{if } \mu \in \{\alpha, \overline{\alpha}\}$$

$$(\mu.p)\backslash\alpha \simeq \mu.(p\backslash\alpha) \quad \text{if } \mu \notin \{\alpha, \overline{\alpha}\}$$

$$(p + q)\backslash\alpha \simeq (p\backslash\alpha) + (q\backslash\alpha)$$

$$p\backslash\alpha\backslash\alpha \simeq p\backslash\alpha$$

$$p\backslash\alpha\backslash\beta \simeq p\backslash\beta\backslash\alpha$$

$$\mathbf{nil}[\phi] \simeq \mathbf{nil}$$

$$(\mu.p)[\phi] \simeq \phi(\mu).(p[\phi])$$

$$(p + q)[\phi] \simeq (p[\phi]) + (q[\phi])$$

$$p[\phi][\eta] \simeq p[\eta \circ \phi]$$