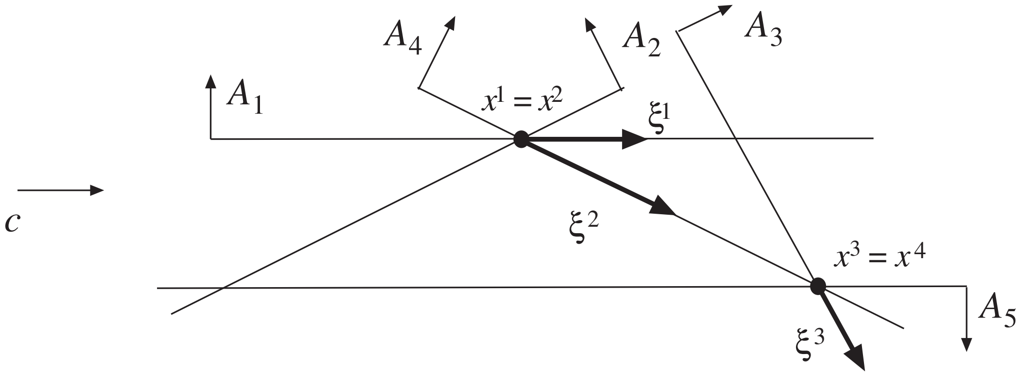
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente il problema di *PL* in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale, individuate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

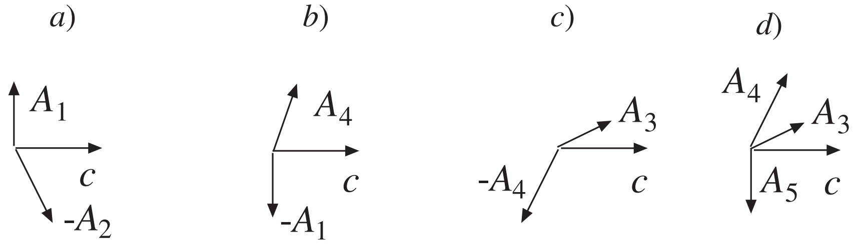
it. 1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in *a*). Quindi $h = 2$. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 4\}$, e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, che è attivo ma non in base: quindi $k = 4$ e si esegue un cambio di base degenere.

it. 2) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_4, come mostrato in *b*). Quindi $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre resta primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 5, quindi $k = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. Il cambio di base è pertanto non degenere.

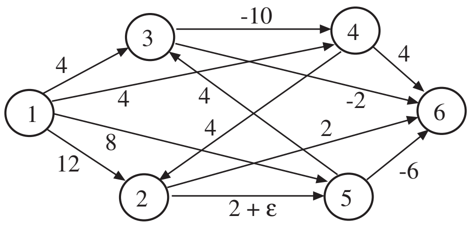
it. 3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e $-A_4$, come mostrato in *c*). Quindi $h = 4$. La base è primale degenere in quanto $I(x^3) = \{3, 4, 5\}$, e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, che è attivo ma non in base: quindi $k = 5$ e si esegue un ulteriore cambio di base degenere.

it. 4) $B = \{3, 5\}$, $y_3 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e A_5, come mostrato in *d*). Pertanto l'algoritmo termina con esito ottimo finito. La base è duale non degenere, mentre resta primale degenere in quanto $x^4 = x^3$ implica $I(x^4) = I(x^3)$.

La soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è unica, in quanto non esistono facce del poliedro (di dimensione maggiore di zero) incidenti nel vertice corrispondente a tale soluzione ottima e perpendicolari al gradiente c della funzione obiettivo. La soluzione ottima duale invece non è unica. Tale proprietà si può verificare mediante la figura *d*), in quanto esistono basi alternative (ad esempio $B' = \{4, 5\}$) che individuano la stessa soluzione ottima primale ma una diversa soluzione ammissibile duale, che è quindi anch'essa ottima per il problema duale.



2) Si consideri la famiglia di problemi di albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, al variare del parametro reale ε. Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 per $\varepsilon = 0$, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, l'insieme dei nodi candidati Q. In ogni iterazione si visitino gli archi in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine si indichi: i) per quali valori del parametro ε la soluzione ottenuta rimane ottima, ii) per quali valori del parametro ε il problema diventa inferiormente illimitato, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Essendo presenti cicli orientati (ad esempio $(3, 4, 2, 5, 3)$) e archi di costo negativo (ma non cicli di costo negativo), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.L in cui Q è implementata come una *coda*, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 5 \times 12 + 1 = 61.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	61	61	61	61	61	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	12	4	4	8	61	$(2, 3, 4, 5)$
2	2	*nil*	1	1	1	1	2	0	12	4	4	8	14	$(3, 4, 5, 6)$
3	3	*nil*	1	1	3	1	3	0	12	4	-6	8	2	$(4, 5, 6)$
4	4	*nil*	4	1	3	1	4	0	-2	4	-6	8	-2	$(5, 6, 2)$
5	5	*nil*	4	1	3	1	4	0	-2	4	-6	8	-2	$(6, 2)$
6	6	*nil*	4	1	3	1	4	0	-2	4	-6	8	-2	(2)
7	2	*nil*	4	1	3	2	4	0	-2	4	-6	0	-2	(5)
8	5	*nil*	4	1	3	2	5	0	-2	4	-6	0	-6	(6)
9	6	*nil*	4	1	3	2	5	0	-2	4	-6	0	-6	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi è mostrato in figura a). Le etichette associate a tale albero, espresse in funzione del parametro ε, sono $d[5] = \varepsilon$ e $d[6] = \varepsilon - 6$ (le altre etichette non dipendono da ε). Ovvero, solo $d[5]$ e $d[6]$ dipendono da ε. Segue che gli archi del grafo che non hanno il nodo 5 e/o il nodo 6 come coda o testa soddisfano le condizioni di Bellman per ogni valore di ε. Resta quindi da verificare per quali valori di ε i restanti archi, non appartenenti all'albero, soddisfino tali condizioni:

$$d[2] + c_{26} \geq d[6] \iff \varepsilon \leq 6$$

$$d[3] + c_{36} \geq d[6] \iff \varepsilon \leq 8$$

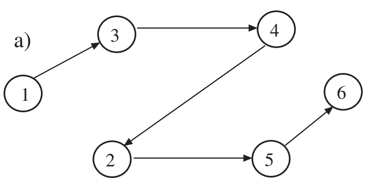
$$d[4] + c_{46} \geq d[4] \iff \varepsilon \leq 4$$

$$d[1] + c_{15} \geq d[5] \iff \varepsilon \leq 8$$

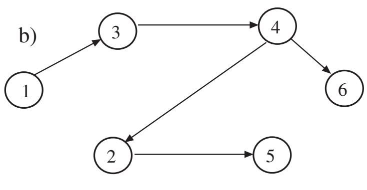
$$d[5] + c_{53} \geq d[3] \iff \varepsilon \geq 0.$$

Segue che l'albero individuato resta ottimo se e solo se $0 \leq \varepsilon \leq 4$. La soluzione ottima cambia invece per $\varepsilon > 4$: in figura b) è riportato, a titolo di esempio, l'albero dei cammini minimi per $\varepsilon = 5$. Per $\varepsilon > 4$, in ogni modo, il problema ammette ottimo finito. Per $\varepsilon < 0$, invece, il ciclo orientato $(3, 4, 2, 5, 3)$ assume costo negativo, e pertanto il problema risulta inferiormente illimitato.

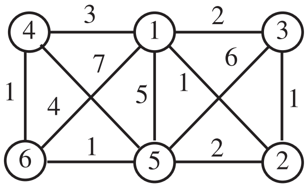
a)



b)



3) Si risolva la seguente istanza del problema TSP



mediante un algoritmo di Branch and Bound che utilizza MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo i con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti in MS1T, crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero le variabili corrispondenti a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, e si inseriscano in coda i figli di un nodo dell'albero delle decisioni in ordine lessicografico crescente dell'insieme di archi la cui variabile è fissata a zero. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo ottenuto al momento dell'interruzione dell'algoritmo, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 8$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata nessuna soluzione ammissibile e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre archi incidenti, e e creare tre figli, in ciascuno dei quali si fissa a zero la variabile corrispondenti a uno di tali archi.

$\boxed{x_{21} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (b). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 10$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{23} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} \geq z$, il nodo viene potato dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 9$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} < z = 10$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, la variabile relativa agli archi $(1,2)$, $(1,3)$ e $(1,4)$.

Poiché Q non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo di Branch and Bound assicura che

$$\min\left\{\, z \,,\ \min\,\{\ \underline{z}(P') \ :\ P' \in Q' \ \}\,\right\}$$

è una valutazione inferiore globale, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il nodo $x_{25} = 0$, che ha $\underline{z} = 9$, e pertanto una valutazione inferiore globale è 9. Poiché $z = 10$, il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è limitato superiormente da $(10-9)/9 \approx 11.11\%$.