RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & \beta x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
$$

Si determinino tutte le terne di valori dei parametri reali α, β e γ per i quali $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema e del suo duale. Fissati quindi $\alpha = 0$, $\beta = 3$ e $\gamma = 3$, si dimostri che in tale scenario $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile ma non ottima per (P), e si determini una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il problema dato e il suo duale:

$$
(P)\quad
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & \beta x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
\qquad
(D)\quad
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 4y_4 & & \\
 & \beta y_1 & + & \gamma y_2 & - & \alpha y_3 & + & y_4 & = & 4 \\
 & y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & \alpha y_4 & = & 1 \\
 & 4y_1 & & & + & 2y_3 & - & \beta y_4 & = & 4 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Affinché $\bar{x}$ e $\bar{y}$ siano soluzioni ottime, rispettivamente primale e duale, devono soddisfare le condizioni degli scarti complementari. Poiché $\bar{y}_2, \bar{y}_3 > 0$, ciò accade se e solo se i corrispondenti vincoli del problema primale sono attivi in $\bar{x}$. Deve pertanto valere:

$$\gamma - 1 = 3, \quad -\alpha + 1 = 1,$$

da cui si ricava $\gamma = 4$ e $\alpha = 0$. Affinché $\bar{x}$ sia ammissibile per il problema primale, i rimanenti vincoli devono essere soddisfatti, ovvero deve valere:

$$1 + \beta \leq 5, \quad 1 + \alpha \leq 4.$$

Poiché $\alpha = 0$, la seconda disuguaglianza è verificata mentre la prima lo è per $\beta \leq 4$. Infine, posti $\gamma = 4$ e $\alpha = 0$, la soluzione $\bar{y}$ è ammissibile per il problema duale per qualsiasi valore di β.

Dal Teorema degli Scarti Complementari, poiché $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime del problema dato (P) e del suo duale (D), rispettivamente, se e solo se sono ammissibili per (P) e (D), rispettivamente, e soddisfano le condizioni degli scarti complementari, tale proprietà si verifica se e solo se $\alpha = 0$, $\beta \leq 4$ e $\gamma = 4$.

Fissando $\alpha = 0$, $\beta = 3$ e $\gamma = 3$, $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per (P) in quanto le quattro disuguaglianze risultano verificate. In particolare, l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{3\}$. Di conseguenza, una soluzione duale y che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $y_1 = y_2 = y_4 = 0$, ma nessuna soluzione con tali caratteristiche può soddisfare il primo vincolo duale in quanto $\beta y_1 + \gamma y_2 - \alpha y_3 + y_4 = 3y_1 + 3y_2 + y_4 = 0$. Segue che $\bar{x}$ non è una soluzione ottima e ammette pertanto direzioni ammissibili di crescita. L'insieme di tali direzioni è costituito da tutte le soluzioni del sistema:

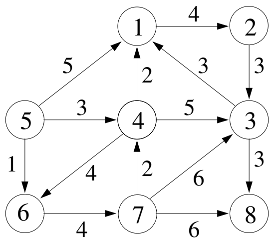
$$
(PR)\quad \left\{
\begin{array}{lcl}
A_{I(\bar{x})}\xi & \leq & 0 \\
c\xi & > & 0,
\end{array}
\right.
$$

che in questo caso diventa:

$$
(PR)\quad \left\{
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & \xi_2 & + & 2\xi_3 & \leq & 0 \\
4\xi_1 & + & \xi_2 & + & 4\xi_3 & > & 0.
\end{array}
\right.
$$

La direzione $\bar{\xi} = (1, 0, 0)$ è pertanto una direzione ammissibile di crescita per $\bar{x}$.

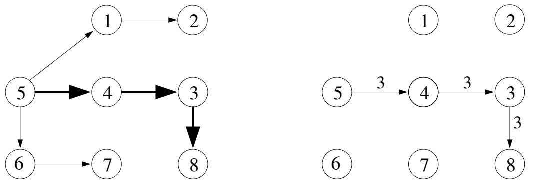
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 8, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Si visitino gli archi di ogni stella uscente per ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si riporti il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Aumentando la capacità dell'arco $(5, 6)$ di una unità, come varia il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

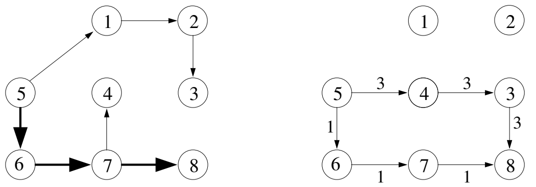
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:



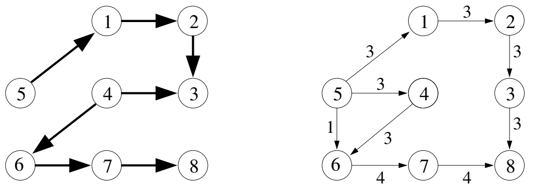
$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

Iterazione 2:



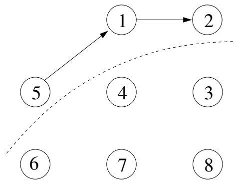
$\theta(P, x) = 1, \quad v = 4$

Iterazione 3:



$\theta(P, x) = 3, \quad v = 7$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo.
Inoltre, il taglio $N_s = \{1, 2, 5\}$, $N_t = \{3, 4, 6, 7, 8\}$ è di capacità minima:
$u(N_s, N_t) = u_{56} + u_{54} + u_{23} = 1 + 3 + 3 = 7 = v$.

Aumentando la capacità dell'arco $(5, 6)$ di una unità, ovvero se $u_{56} = 2$, il valore del flusso massimo resta invariato. Infatti, partendo dal flusso ammissibile di valore 7 ottenuto alla terza iterazione, nel caso $u_{56} = 2$ la procedura di visita termina senza raggiungere la destinazione, individuando il taglio $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7, 8\})$, anch'esso di capacità 7. Si osservi che in tal caso $(\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 6, 7, 8\})$ non è più un taglio di capacità minima: la sua capacità è aumentata infatti di una unità e pertanto vale 8.

3) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & 18x_1 & +12x_2 & +10x_3 & +4x_4 & +2x_5 & & \\ & 5x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

un algoritmo Branch and Bound che usa il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, esegue il branching sull'unica variabile frazionaria nella soluzione ottima del rilassamento continuo, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli (compresa la radice) dell'albero di enumerazione. Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore e inferiore disponibili nel momento in cui l'esplorazione viene interrotta, valutando il gap relativo ottenuto.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 0]$, $\bar{z} = 37 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 0]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 34$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [1, 3/4, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 37$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 32$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 34$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} \leq z$.

$\boxed{x_3 = 1, x_2 = 1}$ $x^* = [4/5, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 36 + 2/5$, $\bar{x} = [0, 1, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 26$. Poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

$\boxed{x_3 = 1, x_2 = 0}$ $x^* = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 32$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} \leq z$.

L'esplorazione viene a questo punto interrotta. La miglior valutazione inferiore disponibile è $z = 34$, mentre la miglior valutazione superiore disponibile è il massimo tra z e le valutazioni superiori associate ai predecessori dei nodi in Q, ossia $36 + 2/5$ associata al nodo $\boxed{x_3 = 1, x_2 = 1}$, ovvero l'unico i cui figli sono ancora in Q. Poiché, essendo tutti i dati interi, una valutazione superiore più accurata è data da 36, la soluzione ottenuta è garantita avere un errore relativo $\leq (36 - 34)/34 \approx 0.058$, ossia all'incirca un gap del 6%.