RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL parametrico rispetto a $\alpha \in \Re$:

$$(P_\alpha) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & \alpha \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Si determini per quali valori di α la soluzione di base duale associata alla base $B = \{1, 2\}$ sia ottima per il problema duale, discutendo l'unicità di tale soluzione ottima al variare di α. Si dimostri inoltre che il problema (P_α) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo la matrice di base associata a $B = \{1, 2\}$ e la sua inversa:

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione di base duale associata a B è:

$$\bar{y}_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\bar{y}$ è ottima se e solo se la corrispondente soluzione di base primale, ovvero:

$$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

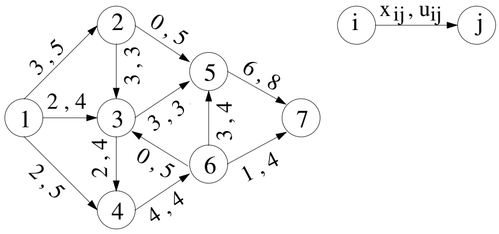
è ammissibile per (P_α). Ciò si verifica se e solo se $2 + 3 \leq \alpha$, ovvero se e solo se $\alpha \geq 5$.

Per discutere l'unicità della soluzione ottima $\bar{y}$ distinguiamo due casi:

1. $\alpha > 5$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ottima non degenere, e pertanto $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima duale, essendo l'unica soluzione duale ammissibile in scarti complementari con $\bar{x}$;
2. $\alpha = 5$: in tal caso $\bar{x}$ è una soluzione di base primale ottima degenere, in quanto $I(\bar{x}) = \{1, 2, 3\}$, e quindi potrebbero esistere altre soluzioni duali ammissibili in scarti complementari con $\bar{x}$, oltre a $\bar{y}$. In particolare, la soluzione di base duale ammissibile $\begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, corrispondente alla base $\{2, 3\}$, soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$, ed è quindi una soluzione ottima duale alternativa a $\bar{y}$.

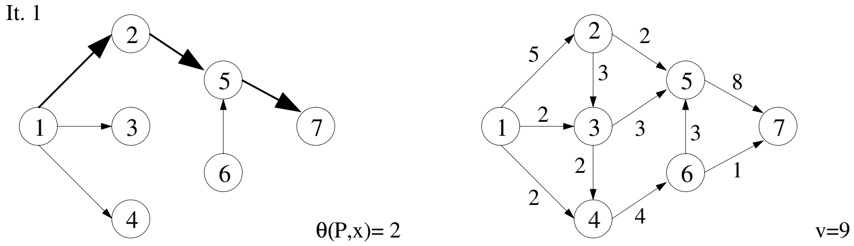
(P_α) non può essere superiormente illimitato per nessun valore di α. Infatti, il problema duale ammette la soluzione ammissibile $\bar{y}$ indipendentemente dal valore assunto da α. Da un corollario del Teorema debole della dualità segue che la funzione obiettivo di (P_α) è superiormente limitata.

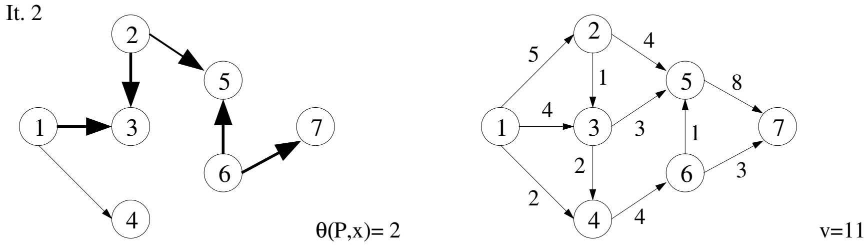
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 7$. A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. È possibile aumentare il valore del flusso massimo aumentando la capacità di un solo arco? Giustificare la risposta.

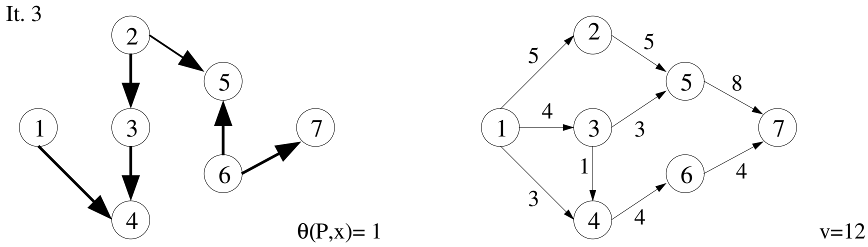


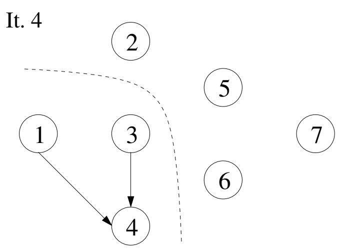
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.



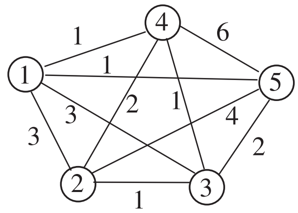






Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo e il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{35} + u_{46} = 5 + 3 + 4 = 12$.
Oltre al taglio individuato dall'algoritmo, anche il taglio $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7\})$ è di capacità minima. Poiché i due tagli non hanno archi in comune, non è possibile aumentare il valore del flusso massimo, che coincide con la capacità minima dei tagli che separano 1 da 7, aumentando la capacità di un solo arco.

3) Si risolva la seguente istanza del problema TSP mediante un algoritmo di Branch and Bound che utilizza MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo i con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti in MS1T, crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero le variabili corrispondenti a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first. Inoltre, per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo ottenuto al momento dell'interruzione dell'algoritmo, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 6$, è mostrato in (a). Poiché $\underline{z} < z$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli, nei quali si fissano a zero, rispettivamente, le variabili x_{23}, x_{34} e x_{35}.

$\boxed{x_{34} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 7$, è mostrato in (c). Poiché è un ciclo Hamiltoniano e $z = +\infty > 7$, si pone $z = 7$; inoltre, il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{23} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 7$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} \geq z$, il nodo viene potato dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 6$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} < z$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, le variabili x_{14}, x_{24} e x_{34}.

Poiché Q non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo di Branch and Bound assicura che

$$\min \{\ z\ ,\ \min \{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$$

è una valutazione inferiore globale, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. La migliore valutazione inferiore disponibile è pertanto 6, mentre la miglior valutazione superiore disponibile è 7. Quindi il gap relativo ottenuto è pari a $1/6 = 16.\bar{6}\%$.