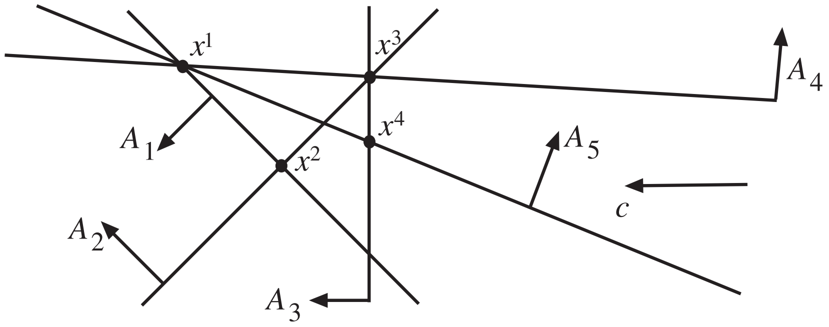
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il problema di PL in figura, per via geometrica, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Si osservi che $c \; // \; A_3$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si individui l'insieme delle soluzioni ottime sia del problema primale che del problema duale, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 4\}$. La soluzione di base primale x^1 viola i vincoli 2 e 3, pertanto $k = 2$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_4. La base è pertanto duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 4, 5\} \neq B$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, A_4)$, come mostrato in figura (a), si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_4 > 0$. Poiché la base $\{1, 2\}$ è ammissibile mentre la base $\{2, 4\}$ non lo è, come è immediato verificare sempre mediante la figura (a), deve necessariamente risultare $h = 4$.

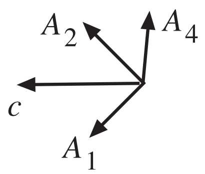
it. 2) $B = \{1, 2\}$. La soluzione di base primale x^2 viola il solo vincolo 3, pertanto $k = 3$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto c è interno al cono generato da A_1 e A_2. La base è pertanto duale non degenere, e anche primale non degenere in quanto $I(x^2) = \{1, 2\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, A_2)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Essendo $c \; // \; A_3$ si ha inoltre $\bar{y}_1/\eta_1 = \bar{y}_2/\eta_2$, e pertanto $h = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3): $B = \{2, 3\}$. La soluzione di base primale x^3 viola il solo vincolo 5, pertanto $k = 5$. Poiché $c \; // \; A_3$ si ha $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_3 > 0$. La base è pertanto duale degenere, ed è anche primale degenere in quanto $I(x^3) = \{2, 3, 4\}$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(A_2, -A_3)$, come mostrato in figura (c), risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_3 < 0$, e pertanto $h = 2$.

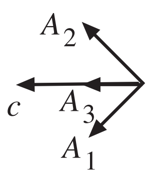
it. 4): $B = \{3, 5\}$. La soluzione di base primale x^4 non viola alcun vincolo, ed è quindi una soluzione ottima del problema primale. Poiché $c \; // \; A_3$ si ha $\bar{y}_3 > 0$ e $\bar{y}_5 = 0$. La base è pertanto duale degenere, mentre è primale non degenere in quanto $I(x^4) = \{3, 5\}$.

Poiché $c \; // \; A_3$, x^4 non è l'unica soluzione ottima primale. L'insieme delle soluzioni ottime del problema primale è infatti costituito dalla faccia del poliedro individuato dall'iperpiano corrispondente al terzo vincolo, avente come estremi x^4 e il vertice del poliedro ottenuto dall'intersezione degli iperpiani corrispondenti al primo e al terzo vincolo.

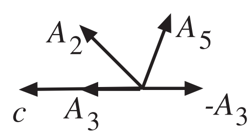
Poiché $B = \{3, 5\}$ è primale non degenere, invece, il problema duale ammette un'unica soluzione ottima, ovvero $(0, 0, \bar{y}_3, 0, 0)$.



(a)

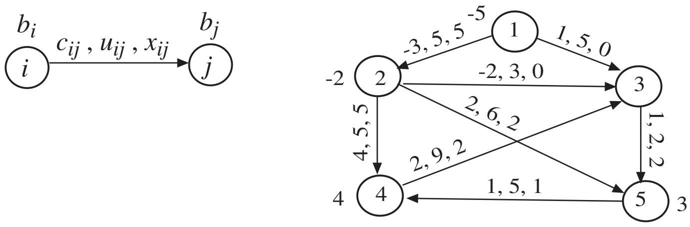


(b)



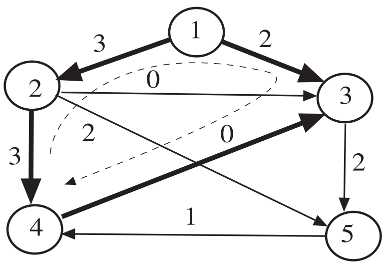
(c)

2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo per l'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 16$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

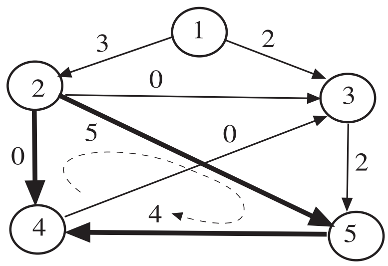


SVOLGIMENTO

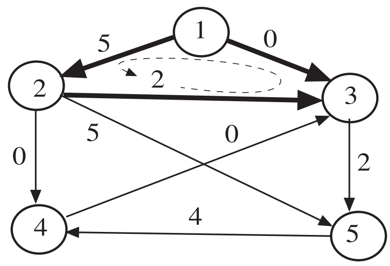
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (in alto, da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi evidenziati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La figura in basso mostra invece il grafo residuo relativo all'ultimo flusso individuato e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi evidenziati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



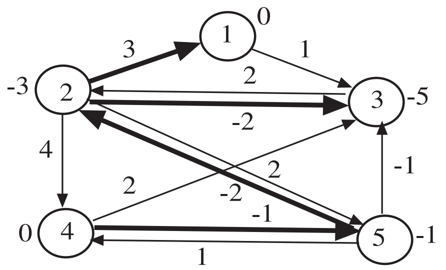
$\theta = 2$, c(C) = -2, $cx = 12$



$\theta = 3$, c(C) = -1, $cx = 9$



$\theta = 2$, c(C) = -6, $cx = -3$



3) Il comune di Pisa decide di aprire alcuni centri vaccinali, per far fronte alla crescente richiesta. Individua pertanto un insieme J di siti candidati per la costruzione di tali centri, e stima pari a c_j il costo da sostenere per costruire un centro nel sito j, $j \in J$. Individua inoltre l'insieme dei quartieri I che necessitano del servizio di vaccinazione, e stima pari ad a_i il numero di abitanti del quartiere i ancora da vaccinare, $i \in I$.

Gli assessori preposti al servizio valutano che 15 minuti sia il tempo di viaggio adeguato per accedere al servizio. In altri termini, il tempo che un abitante dovrebbe impiegare per recarsi dal proprio quartiere a un centro di vaccinazione non dovrebbe eccedere 15 minuti. Il comune di Pisa ha però un budget limitato, pari a B. Decide quindi di costruire centri vaccinali, compatibilmente con il budget disponibile, in modo da massimizzare il numero di abitanti che riusciranno a recarsi presso un centro vaccinale entro tale limite temporale, ovvero entro 15 minuti. Per garantire un servizio accettabile per tutti, si stabilisce inoltre che ogni abitante debba comunque potersi recare presso almeno uno dei centri aperti entro 30 minuti.

Dati i sottoinsiemi $D_{15}(i)$ e $D_{30}(i)$ che specificano, per ogni quartiere i, i siti in J la cui distanza temporale da i è ≤ 15 minuti e ≤ 30 minuti, rispettivamente, si formuli in termini di PLI il problema di decidere in quali siti di J costruire i centri rispettando il vincolo di budget e garantendo che ogni abitante possa recarsi presso almeno uno dei centri aperti entro 30 minuti, con l'obiettivo di massimizzare il numero di abitanti che riusciranno a recarsi presso un centro vaccinale entro 15 minuti.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene aperto un centro vaccinale nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J.$$

Introduciamo inoltre le variabili binarie

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se il quartiere } i \text{ ha una distanza temporale} \leq 15 \text{ min da almeno un centro aperto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in I.$$

Utilizzando tali variabili decisionali, il problema del comune di Pisa può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i \in I} a_i z_i & \\ & \sum_{j \in J} c_j y_j \leq B & \\ & \sum_{j \in D_{30}(i)} y_j \geq 1 & i \in I \\ & \sum_{j \in D_{15}(i)} y_j \geq z_i & i \in I \\ & y_j \in \{0,1\} & j \in J \\ & z_i \in \{0,1\} & i \in I. \end{array}$$

Il primo vincolo è il vincolo di budget. Tale vincolo impone che il costo totale di costruzione dei centri non ecceda il budget disponibile B. Il secondo blocco è costituito da classici vincoli di copertura: per ogni quartiere i, si impone che almeno uno dei centri aperti disti da i non più di 30 minuti. Tali vincoli garantiscono quindi che ogni abitante possa recarsi presso almeno uno dei centri vaccinali aperti entro 30 minuti.

Il terzo blocco di vincoli è costituito da vincoli di copertura e vincoli logici. Per ogni quartiere i, se nessun centro è raggiungibile da i entro 15 minuti, allora $\sum_{j \in D_{15}(i)} y_j = 0$, e ciò forza la variabile z_i a 0. Se invece almeno un centro è raggiungibile da i entro 15 minuti, allora $\sum_{j \in D_{15}(i)} y_j$ è un intero ≥ 1. In questo caso z_i può assumere sia il valore 0 che il valore 1. A livello di soluzione ottima, tuttavia, poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è $\sum_{i \in I} a_i z_i$, in tale caso z_i assumerà correttamente il valore 1, segnalando che il quartiere i ha una distanza temporale ≤ 15 min da almeno un centro vaccinale aperto, e conteggiando gli abitanti del quartiere i nel gruppo di cittadini che riescono a recarsi presso un centro vaccinale nel tempo ritenuto più adeguato, ovvero entro 15 minuti.