RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & -1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando le condizioni degli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ sia ottima per il problema. Nel caso in cui lo sia, si discuta se $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ sia l'unica soluzione ottima del problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \begin{array}{l} \max \ c^T x \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{l} \min \ y^T b \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema della dualità forte e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità duale:

Proposizione. Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per (D). $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & - & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 2y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & = & -1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{2\}$. Di conseguenza, una soluzione primale ammissibile $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_2 - A_2\bar{x} = 0$, ovvero il secondo vincolo deve essere attivo. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere l'equazione

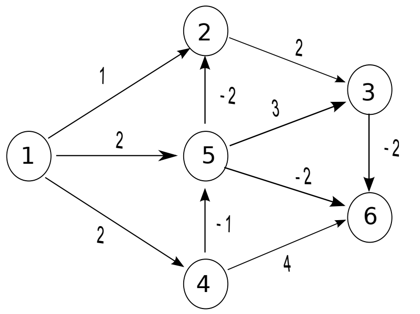
$$x_1 \ - \ x_2 \ = \ 1.$$

Posto $x_2 = \alpha$, tale equazione ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (1 + \alpha, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per (P) per ogni $-1 \leq \alpha \leq 1/2$. Infatti, $x(\alpha)$ rispetta il primo vincolo per $\alpha \leq 1/2$, il terzo per $\alpha \leq 1$ e il quarto per $\alpha \geq -1$. Poiché per $-1 \leq \alpha \leq 1/2$ la soluzione $x(\alpha)$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$ ed è ammissibile, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D). Poiché inoltre ogni soluzione ottima di (P) deve essere ammissibile e complementare a $\bar{y}$, $\{(1 + \alpha, \alpha) \ : \ -1 \leq \alpha \leq 1/2\}$ rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (P), duale di quello dato.

Considerando la soluzione ottima primale $(1, 0)$, ottenuta fissando $\alpha = 0$, è immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per tale soluzione è $\{2\}$. Pertanto, la prima, la terza e la quarta variabile devono valere 0 in qualsiasi solutione duale ammissibili in scarti complementari con $(1, 0)$. Segue che $\bar{y} = (0, 1, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema dato.

2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima è unica?

Infine, si discuta quale algoritmo converrebbe utilizzare, dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, nel caso in cui l'arco $(4, 6)$ cambiasse orientamento, mantenendo invariato il proprio costo. Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

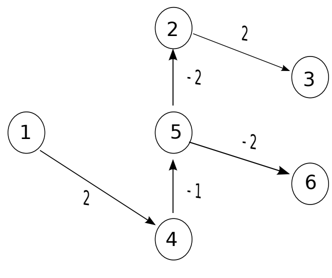
originale	1	2	3	4	5	6
rinumerato	1	4	5	2	3	6

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21.$$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	21	21	21	21	21
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	2	2	1	21	21
2	2	*nil*	1	2	1	1	2	0	2	1	1	21	6
3	3	*nil*	1	2	3	3	3	0	2	1	-1	4	-1
4	4	*nil*	1	2	3	4	3	0	2	1	-1	1	-1
5	5	*nil*	1	2	3	4	3	0	2	1	-1	1	-1

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):



La soluzione ottima non è unica. Infatti l'arco $(3, 6)$, di costo -2, rispetta le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza e può sostituire l'arco $(5, 6)$ nell'albero individuato, producendo un diverso albero dei cammini minimi di radice 1. Se l'arco $(4, 6)$ cambiasse orientamento, il grafo non risulterebbe più aciclico: conterrebbe infatti tre cicli orientati di costo positivo. Per la presenza di archi di costo negativo, l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulterebbe quindi essere l'algoritmo di Bellman, avente complessità in tempo pari a $O(mn)$.

3) L'agenzia per lo sviluppo energetico *Energie* deve aprire p centrali elettriche. Individua pertanto un insieme J di siti candidati all'apertura di una centrale, con $|J| \geq p$. L'agenzia censisce inoltre l'insieme I dei principali centri abitati della regione interessata, e stima le distanze d_{ij} intercorrenti tra il centro abitato i e il sito candidato j, $\forall i \in I, j \in J$.

Tenendo conto che, per ogni centro abitato i, la centrale elettrica *critica* per i è la centrale più vicina a i tra quelle aperte, si formuli in termini di PLI il problema di decidere dove aprire le p centrali elettriche in modo da massimizzare la minima distanza intercorrente tra un centro abitato e la centrale elettrica critica per tale centro abitato.

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema introduciamo le variabili binarie

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'agenzia per lo sviluppo energetico decide di aprire una centrale elettrica nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j \in J.$$

Introduciamo inoltre una variabile ausiliaria z per stimare la minima distanza centro abitato - centrale critica. Utilizzando tali variabili decisionali, il problema di *Energie* può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \max & z & \\ & \sum_{j \in J} x_j = p & \\ & x_j d_{ij} + M(1 - x_j) \geq z & i \in I, j \in J \\ & x_j \in \{0, 1\} & j \in J \end{array}$$

Il primo vincolo impone che vengano aperte p centrali elettriche. Il secondo blocco di vincoli, in cui M è una costante opportunamente elevata, garantisce che, per ogni centro abitato i, z sia una stima per difetto della distanza intercorrente tra i e la relativa centrale elettrica critica (la più vicina a i). Infatti, se $x_j = 1$, ovvero in j è stata aperta una centrale elettrica, il vincolo relativo al centro abitato i garantisce che sia $z \leq d_{ij}$. Se invece $x_j = 0$, il vincolo risulta sempre soddisfatto se M viene scelta adeguatamente. Ad esempio, M può essere scelta uguale alla massima distanza tra i centri in I e i siti in J, ovvero $M = \max_{i \in I, j \in J} d_{ij}$. Alternativamente, è possibile scegliere una costante distinta M_i per ogni i, pari a $\max_{j \in J} d_{ij}$. Si noti che, stimando z per difetto la distanza tra i e la sua centrale critica per ogni i, z stima anche per difetto la minima di tali distanze.

Poiché la funzione obiettivo, da massimizzare, è z, a livello di soluzione ottima z risulterà uguale alla minima distanza intercorrente tra un centro abitato e la relativa centrale critica, che verrà pertanto massimizzata.