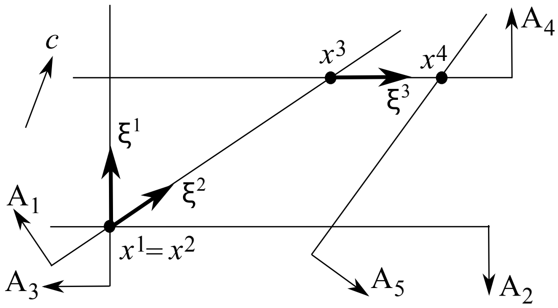
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si specifichino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo termina con esito "ottimo finito", si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia primale che duale. Si discuta infine come cambierebbe la risposta finale nel caso in cui il vettore dei costi venisse modificato, e risultasse $c = A_5$.



SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{2, 3\}$: $y_2 < 0$ e $y_3 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ e $-A_3$, come mostrato in *a*). Quindi $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland. La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 3\}$ (esiste un vincolo attivo non in base), ma duale non degenere perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 è nullo, e si ottiene in corrispondenza del vincolo 1, che è attivo ma non in base. Quindi $k = 1$, e si esegue un cambio di base degenere.

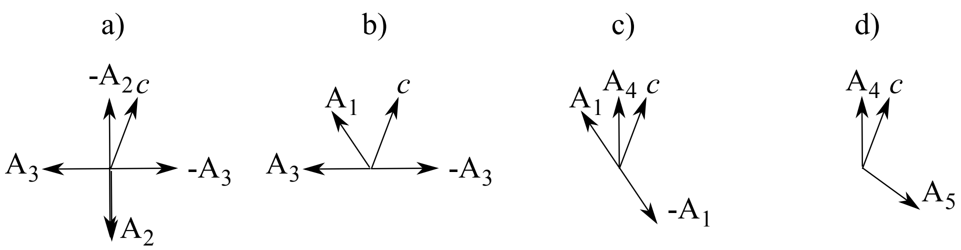
it. 2) $B = \{1, 3\}$: $y_1 > 0$ e $y_3 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_3$, come mostrato in *b*). Quindi $h = 3$. La base è duale non degenere, mentre resta primale degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, quindi $k = 4$.

it. 3) $B = \{1, 4\}$: $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_4, come mostrato in *c*), quindi $h = 1$. La base è primale non degenere, in quanto $I(x^3) = B$, e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$.

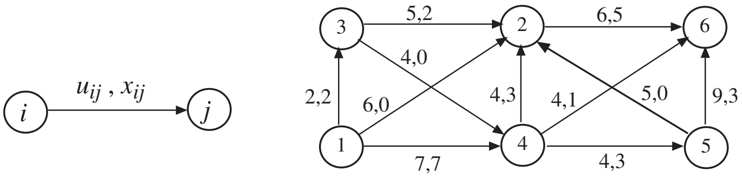
it. 4) $B = \{4, 5\}$: $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_4 e A_5, come mostrato in *d*). L'algoritmo quindi termina avendo individuato in x^4 una soluzione ottima primale. La base è sia primale che duale non degenere.

Poiché la base ottima individuata è sia primale che duale non degenere, le corrispondenti soluzioni di base, sia primale che duale, sono le uniche soluzioni ottime primali e duali, rispettivamente.

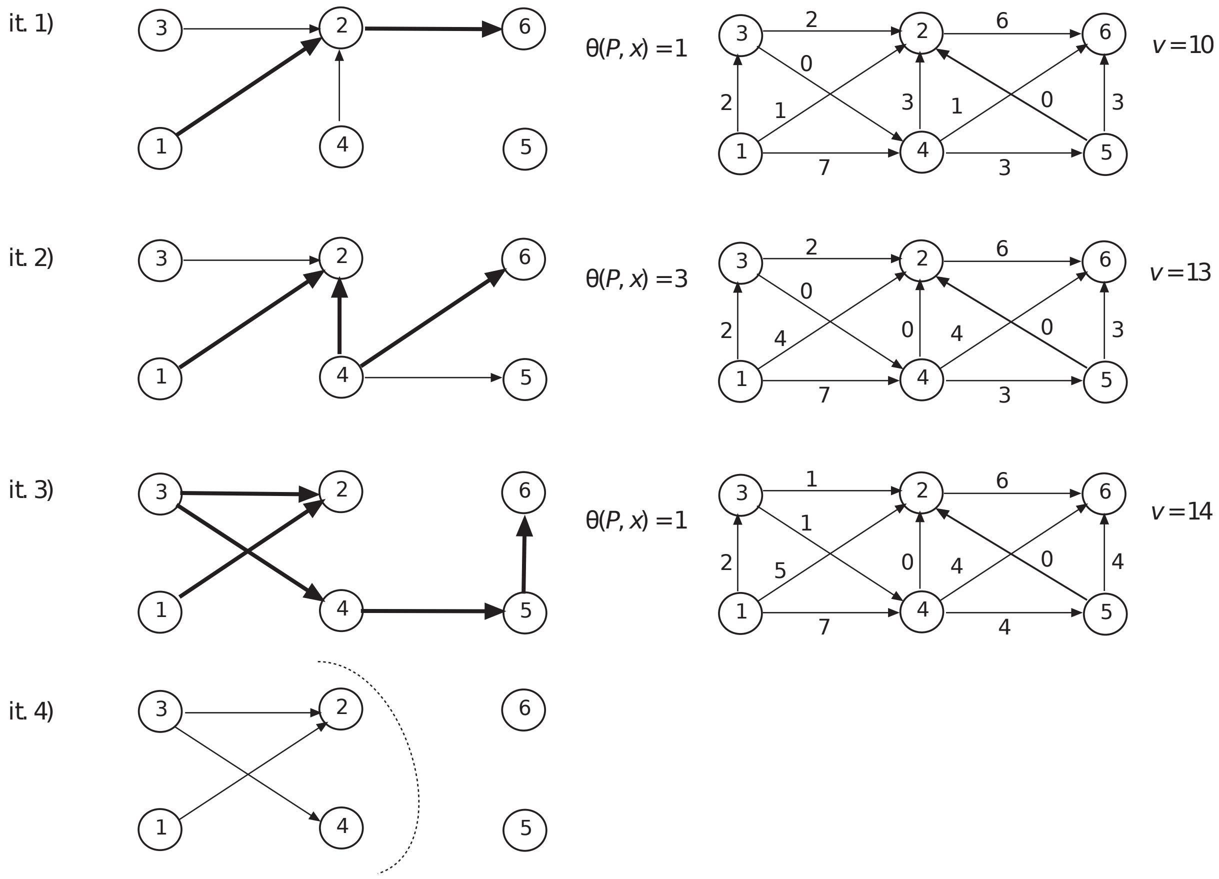
Se $c = A_5$, x^4 continuerebbe a essere una soluzione ottima primale, ma non sarebbe più unica. Infatti, l'intero lato del politopo avente come estremi x^4 e il vertice individuato dall'intersezione delle rette associate al secondo e al quinto vincolo primale definirebbe un insieme di soluzioni ottime primali alternative. La soluzione ottima duale, invece, pari a $(0, 0, 0, 0, 1)$, continuerebbe a essere unica.



2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso dato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si consideri infine il caso in cui la capacità dell'arco $(1, 2)$ sia un parametro α positivo, e si discuta quale sia il minimo valore di α per cui il valore del flusso massimo precedentemente individuato rimanga invariato, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO
Le iterazioni sono illustrate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati). A destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio della quantità $\theta(P, x)$ lungo P, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = 6 + 4 + 4 = 14 = v$.



Se la capacità dell'arco $(1, 2)$ fosse un parametro α intero positivo, il minimo valore del parametro per cui il valore del flusso massimo continuerebbe a valere 14 è $\alpha = 5$. Per $\alpha < 5$, infatti, il taglio $(N'_s, N'_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$ avrebbe capacità minore di 14. Pertanto, per il Teorema *Flusso massimo-Taglio di capacità minima*, il valore del flusso massimo sarebbe minore di 14.

3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lllllll} \max & x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +8x_4 & +10x_5 & \\ & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq \; 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \; \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si proponga quindi un rilassamento basato su eliminazione di vincoli per l'istanza in esame, e si indichi quale sarebbe stata la valutazione superiore al nodo radice utilizzando tale rilassamento alternativo, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottima del rilassamento continuo e con $\bar{x}$ la soluzione restituita dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice: $x^* = [0, 0, 1/2, 1, 1]$, $\bar{z} = 21$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 19$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$x_3 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$x_3 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 19 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché i costi sono interi, una valutazione superiore più accurata è 19. Pertanto, poiché $\bar{z} = z$, il nodo può essere chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1, 1/2]$, $\bar{z} = 19$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 17 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota. La soluzione ottima determinata è $[1, 0, 0, 1, 1]$, di valore 19.

Un rilassamento basato su eliminazione di vincoli potrebbe consistere nel rilassare il vincolo di zaino. In tal caso, la soluzione ottima del problema rilassato si otterrebbe banalmente ponendo a 1 tutte le variabili decisionali, ottenendo pertanto una valutazione superiore pari a 28 al nodo radice. Un rilassamento basato su eliminazione di vincoli alternativo potrebbe essere ottenuto eliminando i vincoli di integralità, e sostituendoli con vincoli di non negatività. In tal caso, la soluzione ottima del problema rilassato si otterrebbe ponendo a 2.5 la variabile decisionale x_5, ovvero la prima secondo l'ordine CUD, ottenendo una valutazione superiore pari a 25 al nodo radice. Si osservi che il rilassamento continuo domina entrambi i rilassamenti proposti.