RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Dato il seguente problema di *PL*, si determini per quali valori del parametro reale α la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia ottima

$$(P_\alpha) \qquad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & \alpha \end{array}$$

Si determini inoltre: **1.a)** per quali valori di α la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia l'unica soluzione ottima, e **1.b)** per quali valori di α la soluzione $\bar{x} = [1, 1]$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Data la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \;\; \max\{\, c^T x \,:\, Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \;\; \min\{\, y^T b \,:\, y^T A = c^T \,,\, y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di (P_α) è

$$(D_\alpha) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & y_1 & & & + & y_3 & + & \alpha y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 3 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \,:\, A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{2, 3\}$ per ogni $\alpha \neq 2$, mentre $I(\bar{x}) = \{2, 3, 4\}$ per $\alpha = 2$. Si osservi che, essendo le righe A_2 e A_3 linearmente indipendenti, $\bar{x}$ è una soluzione di base per ogni α, è ammissibile per $\alpha \geq 2$, ed è degenere per $\alpha = 2$.

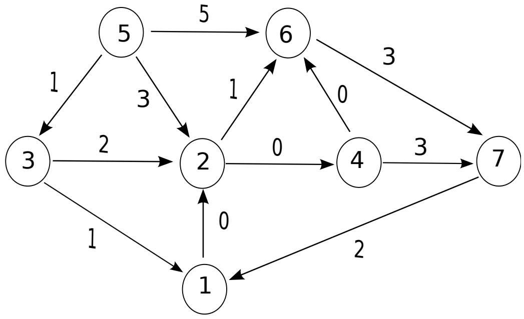
Per $\alpha > 2$, una soluzione duale $\bar{y}$ che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_1 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D_α) essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -y_2 & + & 2y_3 & = & 3 \\ y_2 & - & y_3 & = & -1 \\ y_2 & , & y_3 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $[\bar{y}_2, \bar{y}_3] = [1, 2]$. Pertanto, per $\alpha > 2$, $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P_α). Poiché $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è ammissibile per (D_α) indipendentemente dal valore del parametro α, e rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$ anche per $\alpha = 2$, possiamo concludere che $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P_α) anche per $\alpha = 2$. Segue che $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P_α) per $\alpha \geq 2$.

Per discuterne l'unicità possiamo considerare ancora il teorema degli scarti complementari. $\bar{y} = [0, 1, 2, 0]$ è una soluzione di base ottima non degenere per (D_α) per ogni $\alpha \geq 2$. Poiché qualsiasi soluzione ottima di (P_α) deve verificare le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$, e $\bar{y}$ è non degenere, possiamo concludere che $\bar{x}$ sia l'unica soluzione ottima di (P_α) (per $\alpha \geq 2$).

2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 5 sul grafo in figura.



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Tale albero è unico? Giustificare la risposta.

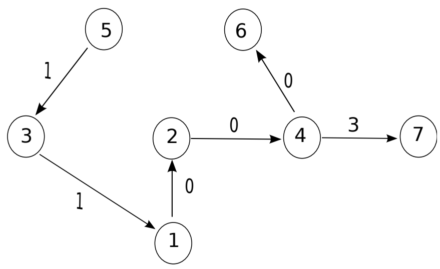
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene cicli orientati, ad esempio $(1, 2, 6, 7)$, e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$

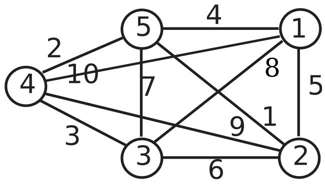
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		5	5	5	5	*nil*	5	5	31	31	31	31	0	31	31	(5)
1	5	5	5	5	5	*nil*	5	5	31	3	1	31	0	5	31	$(2, 3, 6)$
2	3	3	5	5	5	*nil*	5	5	2	3	1	31	0	5	31	$(1, 2, 6)$
3	1	3	1	5	5	*nil*	5	5	2	2	1	31	0	5	31	$(2, 6)$
4	2	3	1	5	2	*nil*	2	5	2	2	1	2	0	3	31	$(4, 6)$
5	4	3	1	5	2	*nil*	4	4	2	2	1	2	0	2	5	$(6, 7)$
6	6	3	1	5	2	*nil*	4	4	2	2	1	2	0	2	5	(7)
7	7	3	1	5	2	*nil*	4	4	2	2	1	2	0	2	5	$\emptyset$

L'albero ottimo individuato è mostrato in figura:



Considerando gli archi non appartenenti a tale albero, le condizioni di ottimalità di Bellman sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta tranne che per l'arco $(6, 7)$. Si ha infatti $d(6) + c_{6,7} = 2 + 3 = 5 = d(7)$. Poiché è possibile utilizzare l'arco $(6, 7)$ al posto dell'arco $(4, 7)$, ottenendo un albero di radice 5 alternativo, segue che l'albero ottimo individuato non è l'unico albero dei cammini minimi di radice 5.

3) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento, non utilizza nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda, e si inseriscano in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio, se si seleziona il nodo 1, $(1,2)$ è inserito prima di $(1,3)$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (incluso il nodo radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si indichi la migliore valutazione inferiore e la miglior valutazione superiore disponibili nel momento in cui l'esecuzione dell'algoritmo viene interrotta (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile. Pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e a creare $3(3-1)/2 = 3$ figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(1,5)$, $(2,5)$ e $(4,5)$ (i nodi sono inseriti in Q in quest'ordine).

$\boxed{x_{15} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 17$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 17 < z = +\infty$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(1,2)$, $(2,3)$ e $(2,5)$, inserendoli in Q in quest'ordine.

$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $20 < z = +\infty$, si pone $z = 20$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{45} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 19 < z = 20$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(1,2)$, $(2,3)$ e $(2,5)$, inserendoli in Q in quest'ordine.

$\boxed{x_{15} = x_{12} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 20 \geq z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{15} = x_{23} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (f). Poiché $\underline{z} = 18 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti ai lati $(2,5)$, $(3,5)$ e $(4,5)$, inserendoli in Q in quest'ordine.

Poiché sono stati visitati 6 nodi, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che la migliore valutazione inferiore al termine dell'esecuzione è pari a $\min\{\, z \,,\, \min\,\{\, \underline{z}(P') \,:\, P' \in Q' \,\}\,\}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene i nodi $\boxed{x_{15} = 0}$, $\boxed{x_{45} = 0}$ e $\boxed{x_{15} = x_{23} = 0}$, pertanto la miglior valutazione inferiore disponibile quando l'algoritmo termina è $\min\{\,20, \min\{\,17\,,\,19\,,\,18\,\}\,\} = 17$, mentre la migliore valutazione superiore è 20. Il gap relativo a terminazione è pertanto $(20-17)/17 \approx 17.6\%$.