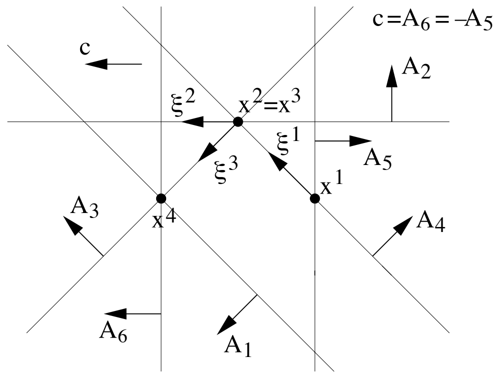
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Successivamente, si consideri il caso in cui $c = A_1$: la soluzione ottima trovata in precedenza resta tale? Qual è, in questo caso, l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema primale? Giustificare le risposte.



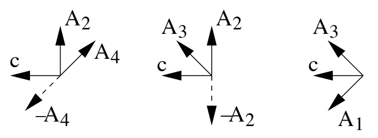
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{4, 5\}$, $y_4 = 0$ e $y_5 = -1 < 0$ poiché $c = -A_5$, quindi $h = 5$. La base è primale non degenere ($I(x^1) = B$) ma duale degenere ($y_4 = 0$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 2 e 3: quindi $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

it.2) $B = \{2, 4\}$, $y_2 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_4$, come mostrato in figura (a). Quindi $h = 4$. La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4\}$), ma duale non degenere ($y_2, y_4 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza al vincolo 3, attivo ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = 3$.

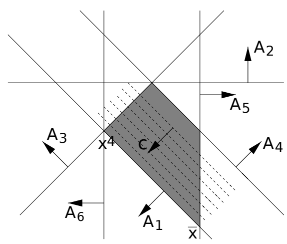
it.3) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ e A_3, come mostrato in figura (b). Quindi $h = 2$. La base è duale non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$), ma è primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4\}$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 1 e 6: quindi $k = \min\{1, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it.4) $B = \{1, 3\}$, $y_1 > 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e A_3, come mostrato in figura (c). La base è duale ammissibile e quindi l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale x^4. La base è primale degenere ($I(x^4) = \{1, 3, 6\}$) ma duale non degenere ($y_1, y_3 \neq 0$).

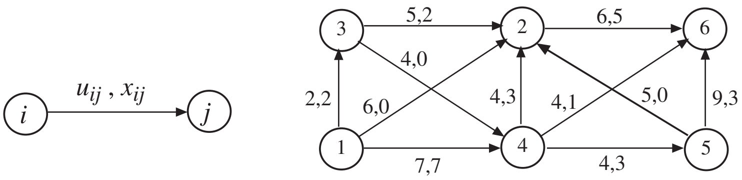


(a) (b) (c)

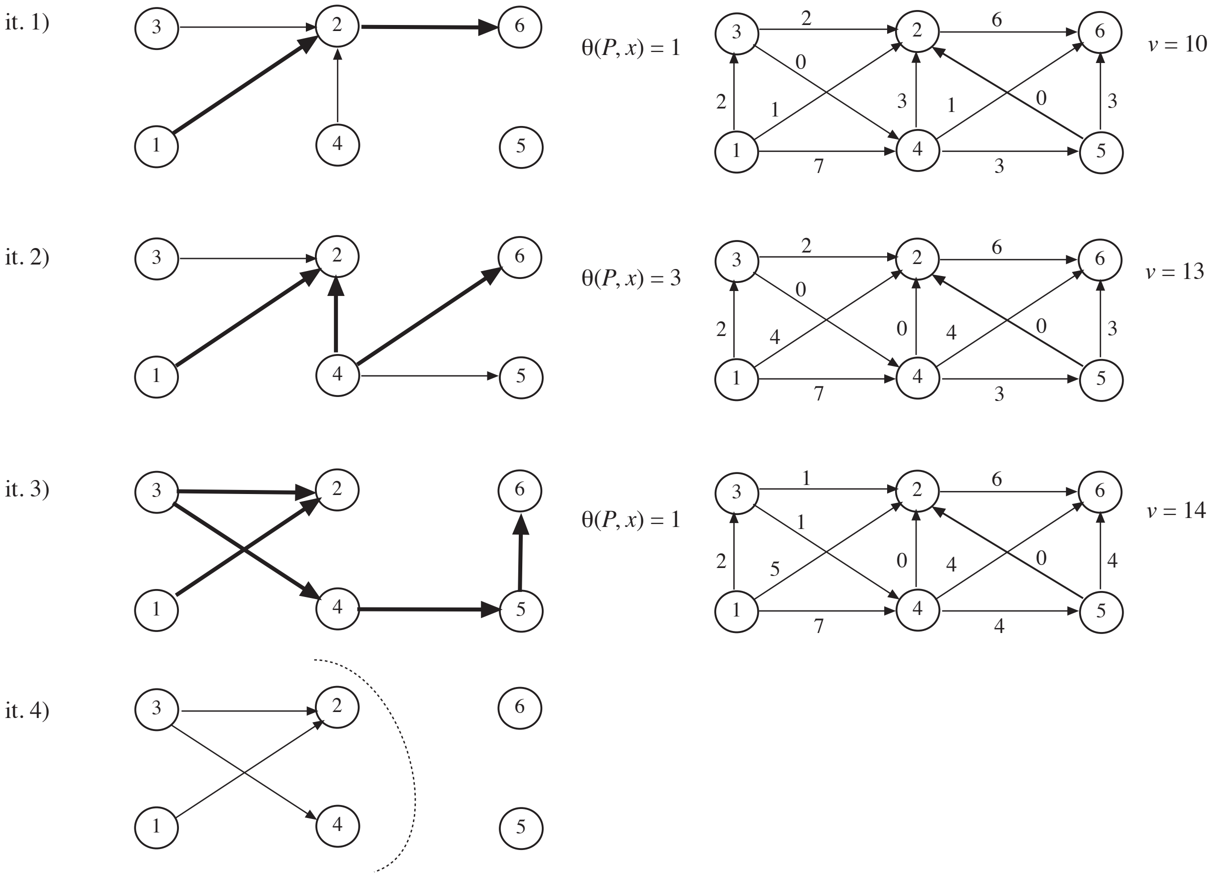
Nel caso in cui $c = A_1$, la base $B = \{1, 3\}$ resta duale ammissibile poiché c continua ad appartenere al cono generato da A_1 e A_3 (in tal caso $y_1 = 1$ e $y_3 = 0$). Quindi x^4 è una soluzione ottima del problema primale anche in questo scenario. Essendo $c = A_1$, in tale scenario l'insieme delle soluzioni ottime del problema primale è costituito dalla faccia del poliedro avente come estremi x^4 e il vertice $\bar{x}$ evidenziato nella figura seguente.



2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione si specifichi l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta infine come cambierebbero il flusso massimo e il taglio di capacità minima individuati dall'algoritmo se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$.



SVOLGIMENTO
Le iterazioni sono illustrate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati). A destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio della quantità $\theta(P, x)$ lungo P, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato, che è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{45} + u_{46} = 6 + 4 + 4 = 14 = v$.



Se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$, le iterazioni eseguite dall'algoritmo rimarrebbero invariate tranne l'ultima, nella quale il taglio determinato sarebbe $(N'_s, N'_t) = (\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$, anch'esso di capacità minima $u(N'_s, N'_t) = 14$. Pertanto, il flusso massimo individuato dall'algoritmo sarebbe invariato, mentre cambierebbe il taglio di capacità minima restituito (si noti che (N_s, N_t) è comunque un taglio di capacità minima alternativo).

3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +8x_4 & +10x_5 & & \\ & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & \leq & 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Al termine si discuta se la soluzione ottima determinata resterebbe tale nel caso in cui il costo del secondo oggetto venisse ridotto di un'unità, ovvero valesse 3 invece di 4, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento in ogni nodo e con $\bar{x}$ la soluzione ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore in ogni nodo ($\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore in ogni nodo ($\underline{z} = c^T \bar{x}$), e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; si pone inoltre $z = -\infty$.

Nodo radice: $x^* = [0, 0, 1/2, 1, 1]$, $\bar{z} = 21$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 19$. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$x_3 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$x_3 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$x_3 = 1$, $x_4 = 1$: $x^* = [0, 0, 1, 1, 1/2]$, $\bar{z} = 19$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $x^* = [0, 1/2, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = 18$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 0$, $x_2 = 1$: $x^* = [0, 1, 0, 1/2, 1]$, $\bar{z} = 18$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 0, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo chiuso dalla valutazione superiore.

$x_3 = 0$, $x_2 = 0$: $x^* = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 19$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità (sarebbe stato chiuso anche grazie alla valutazione superiore).

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota. La soluzione ottima determinata è $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, di valore $z = 19$. Se il costo del secondo oggetto valesse 3 invece di 4, la soluzione $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, di valore $z = 19$, continuerebbe a essere ottima. Infatti l'istanza risolta, in cui il secondo oggetto costa 4, rappresenta un rilassamento per l'istanza modificata, in cui il secondo oggetto costa 3. Poiché la soluzione ottima del rilassamento, ovvero $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, è ammissibile per l'istanza rilassata, e il suo valore, ovvero $z = 19$, è lo stesso assunto nell'istanza rilassata (in x, infatti, la componente relativa al secondo oggetto vale 0), segue che la soluzione ottima del rilassamento è ottima anche per l'istanza rilassata.