RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}$$

Si determinino tutte le terne di valori dei parametri α, β e γ per le quali $\bar{x} = (1, 1, 0)$ e $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ sono, rispettivamente, una soluzione ottima del problema dato e del suo duale. Tra le terne individuate, si determinino quelle per cui il problema duale ammette una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il problema dato e il suo duale:

$$(P)\quad \begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & \beta x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & \gamma x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & -\alpha x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & \alpha x_2 & - & \beta x_3 & \leq & 4
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 5y_1 & + & 3y_2 & & & + & 4y_4 & & \\
 & y_1 & + & \gamma y_2 & - & \alpha y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & \beta y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & \alpha y_4 & = & 1 \\
 & y_1 & & & + & 2y_3 & - & \beta y_4 & = & 4 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Le soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime, rispettivamente per il problema dato e il suo duale, se e solo se sono ammissibili e soddisfano le condizioni degli scarti complementari. Essendo $\bar{y}_2, \bar{y}_3 \neq 0$, i corrispondenti vincoli del problema primale devono essere attivi in $\bar{x}$. Abbiamo quindi:

$$\gamma - 1 = 3, \quad -\alpha + 1 = 0,$$

da cui si deduce $\gamma = 4$ e $\alpha = 1$. Affinché $\bar{x}$ sia ammissibile per il problema primale, i rimanenti vincoli devono essere soddisfatti, ovvero:

$$1 + \beta \leq 5, \quad 1 + \alpha \leq 4.$$

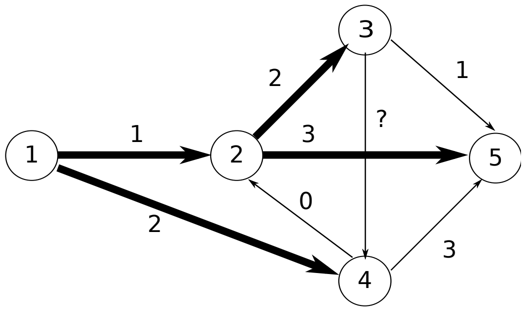
Poiché $\alpha = 1$, la seconda disugualianza è verificata mentre la prima vale per $\beta \leq 4$. Infine, posti $\gamma = 4$ e $\alpha = 1$, la soluzione $\bar{y}$ è ammissibile per il problema duale per qualsiasi valore di β. Pertanto, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono rispettivamente una soluzione ottima del problema dato e del suo duale se e solo se $\alpha = 1$, $\beta \leq 4$ e $\gamma = 4$.

Per ogni terna individuata, una qualsiasi soluzione ottima $\hat{y}$ del problema duale deve costituire una coppia di soluzioni complementari con qualsiasi soluzione ottima del problema primale, in particolare con $\bar{x}$. Affinché risulti $\hat{y}_1 > 0$, il primo vincolo del problema primale deve essere attivo in $\bar{x}$ e pertanto deve risultare $\beta = 4$. Possiamo quindi limitarci a considerare il caso $\alpha = 1$, $\beta = 4$ e $\gamma = 4$, per il quale risulta $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, in questo caso l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale è costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_1 & + & 4y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
4y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
y_1 & & & + & 2y_3 & - & 4y_4 & = & 4 \\
 & & & & & & y_4 & = & 0 \\
y_1, & & y_2, & & y_3 & & & \geq & 0.
\end{array}\right.$$

Tale sistema ammette $\bar{y} = (0, 1, 2, 0)$ come unica soluzione, pertanto non esiste alcuna terna di valori dei parametri per cui il problema duale ammetta una soluzione ottima $\hat{y}$ tale che $\hat{y}_1 > 0$.

2) Si consideri il grafo in figura, in cui il costo associato all'arco $(3,4)$, c_{34}, non è noto. Si individui per quali valori di c_{34} l'albero T evidenziato in figura è un albero dei cammini minimi di radice 1, giustificando la risposta. Si fissi quindi $c_{34} = -2$ e, nel caso in cui per tale scelta T non sia un albero dei cammini minimi di radice 1, si esegua un passo dell'algoritmo SPT per migliorare T.



SVOLGIMENTO

T è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se il vettore di etichette dei nodi $d \in R^5$, tale che d_i è il costo dell'unico cammino in T da 1 a i, $i = 1, ..., 5$, soddisfa le condizioni di Bellman:

$$d_i + c_{ij} \geq d_j, \text{ per ogni arco } (i,j).$$

Effettuando una visita a ventaglio di T a partire dal nodo 1 si determinano i seguenti valori:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 3, \quad d_4 = 2, \quad d_5 = 4.$$

T è un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di c_{34} che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di Bellman per ogni arco non appartenente a T. Consideriamo tali archi:

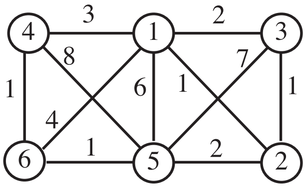
1. $(4,2)$: $d_4 + c_{42} \geq d_2$, ovvero $2 \geq 1$: condizione rispettata;
2. $(3,5)$: $d_3 + c_{35} \geq d_5$, ovvero $3 + 1 \geq 4$: condizione rispettata;
3. $(4,5)$: $d_4 + c_{45} \geq d_5$, ovvero $2 + 3 \geq 4$: condizione rispettata;
4. $(3,4)$: $d_3 + c_{34} \geq d_4$, ovvero $3 + c_{34} \geq 2$; tale condizione è soddisfatta se e solo se $c_{34} \geq -1$.

Quindi, T è un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $c_{34} \geq -1$. Si osservi che l'imposizione delle condizioni di Bellman garantisce che il costo dell'unico ciclo orientato presente nel grafo, vale a dire $(2,3,4)$, sia non negativo per $c_{34} \geq -1$: il ciclo ha infatti costo ≥ 0 se e solo se $c_{34} \geq -2$.

Scegliendo $c_{34} = -2$, l'arco $(3,4)$ viola le condizioni di Bellman. E' quindi possibile migliorare T, mediante un passo dell'algoritmo SPT, inserendo l'arco $(3,4)$ al posto di $(1,4)$, e aggiornando d e il vettore dei predecessori p di conseguenza: $d_4 := 1$ e $p_4 := 3$.

3) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento, non utilizza nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati in esso incidenti nella soluzione di MS1T (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda, e si inseriscano in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio, se si seleziona il nodo 1, $(1,2)$ è inserito prima di $(1,3)$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché.

Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichi il gap relativo ottenuto quando l'esecuzione viene interrotta, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 8$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli, in ciascuno dei quali si fissa a zero la variabile corrispondente a uno di tali archi.

$\boxed{x_{21} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (b). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 10$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{23} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 10$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} \geq z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 9$, è mostrato in (d). Poichè $\underline{z} < z = 10$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, la variabile relativa agli archi $(1,2)$, $(1,3)$ e $(1,4)$.

Poiché Q non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che

$$\min \{ \, z \, , \, \min \{ \, \underline{z}(P') \, : \, P' \in Q' \, \} \, \}$$

è una valutazione inferiore globale, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il nodo $x_{25} = 0$, che ha $\underline{z} = 9$, e pertanto la valutazione inferiore globale è 9. Poiché $z = 10$, il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è limitato superiormente da $(10-9)/9 \approx 11.11\%$.