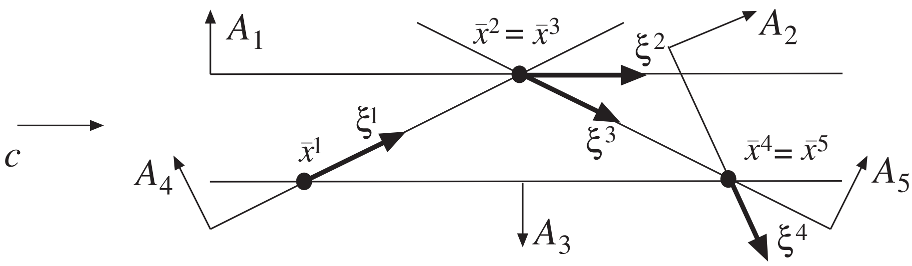
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Si discuta infine quale sarebbe l'esito di risoluzione nel caso in cui il secondo e il terzo vincoli non fossero presenti, e si utilizzasse l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $\{1, 5\}$. Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

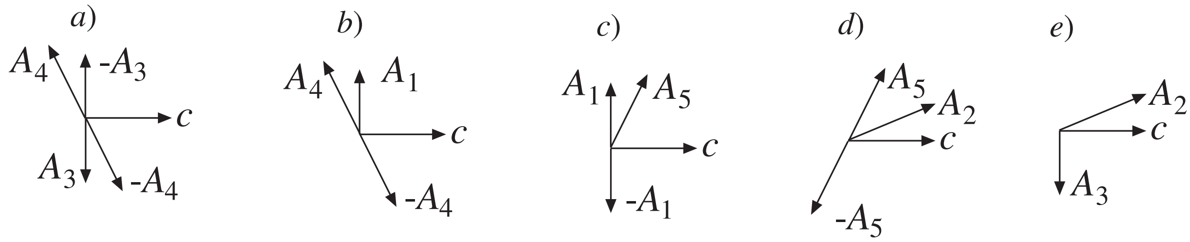
it. 1) $B = \{3, 4\}$: $y_3 < 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e $-A_4$, come mostrato in figura *a*). Quindi $h = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. La base non è primale degenere, in quanto $I(\bar{x}^1) = \{3, 5\} = B$, e neppure duale degenere in quanto tutte le variabili duali in base sono non nulle. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1 e 5, e quindi $k = \min\{1, 5\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{1, 4\}$: $y_1 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_4$, come mostrato in figura *b*), quindi $h = 4$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(\bar{x}^2) = \{1, 4, 5\} \neq B$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 5, attivo ma non in base. Si esegue quindi un cambio di base degenere ponendo $k = 5$.

it. 3) $B = \{1, 5\}$: $y_1 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_5, come mostrato in figura *c*), quindi $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre è ancora primale degenere in quanto $\bar{x}^3 = \bar{x}^2$ implica $I(\bar{x}^3) = I(\bar{x}^2)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 2 e 3, e quindi $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

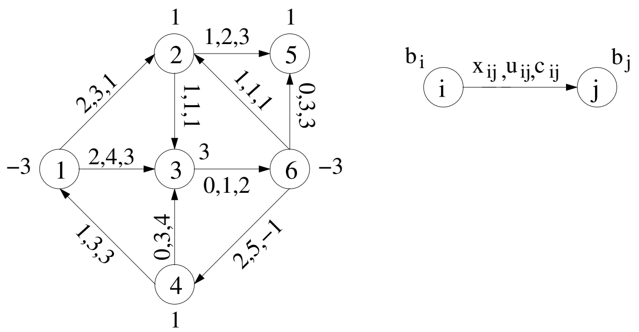
it. 4) $B = \{2, 5\}$: $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_5$, come mostrato in figura *d*), quindi $h = 5$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(\bar{x}^4) = \{2, 3, 5\}$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^4 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 3, attivo ma non in base. Si esegue quindi un altro cambio di base degenere ponendo $k = 3$.

it. 5) $B = \{2, 3\}$: $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e A_3, come mostrato in figura *e*). L'algoritmo quindi termina avendo determinato una soluzione ottima per il primale e una soluzione ottima per il duale. In effetti la soluzione ottima primale era stata determinata al passo precedente ($\bar{x}^4 = \bar{x}^5$), ma solo nel corso della quinta iterazione viene dimostrata la sua ottimalità individuando una soluzione duale ammissibile che rispetta con essa le condizioni degli scarti complementari.



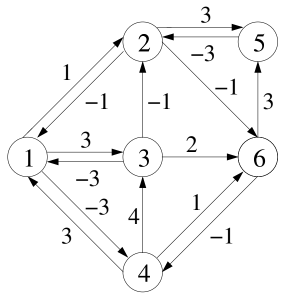
Se il secondo e il terzo vincolo non fossero presenti, ξ^3 sarebbe una direzione di crescita ammissibile illimitata. Pertanto, il problema primale sarebbe superiormente illimitato, e di conseguenza il problema duale risulterebbe vuoto.

2) Si consideri il problema di flusso di costo minimo in figura. Si verifichi se il flusso ammissibile riportato sia di costo minimo e, nel caso non lo sia, si determini un flusso ammissibile di costo minore, utilizzando un opportuno ciclo aumentante (*Suggerimento*: si considerino cicli aumentanti formati da tre nodi). Qualora neppure il flusso determinato sia di costo minimo, si modifichi il costo di alcuni archi del grafo in maniera tale che lo diventi. Giustificare le risposte.

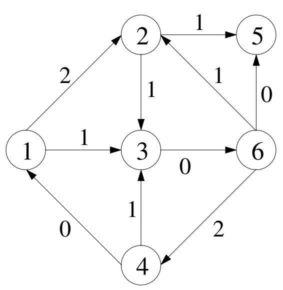


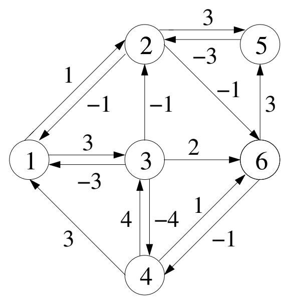
SVOLGIMENTO

Un flusso ammissibile è di costo minimo se e solo se non ammette cicli aumentanti di costo negativo, ovvero se e solo se il corrispondente grafo residuo non contiene cicli (orientati) negativi. La figura sotto riportata mostra il grafo residuo associato al flusso dato, con i relativi costi. Tale grafo residuo contiene cicli negativi. Ad esempio, il ciclo $C_1 = (1, 4, 3)$, di costo $C(C_1) = -2$ e capacità $\theta = 1$, che può essere individuato applicando l'algoritmo SPT.L a partire da un nodo radice fittizio, collegato a ogni nodo del grafo mediante un arco di costo zero.

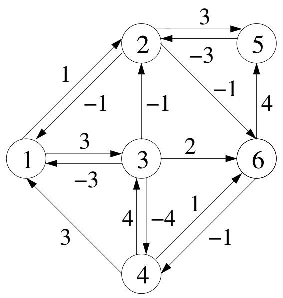


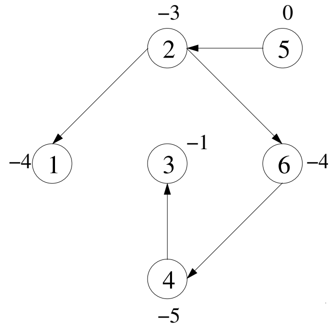
Inviando una unità di flusso lungo il ciclo C_1 si ottiene il flusso riportato nella figura in basso a sinistra, di costo 12, mentre il flusso dato ha costo 14. Neppure questo flusso è di costo minimo in quanto il grafo residuo, riportato nella figura a destra, contiene cicli negativi. Ad esempio, contiene il ciclo $C_2 = (2, 6, 5)$, di costo $C(C_2) = -1$.





Ponendo $c_{65} = 4$, il costo del ciclo C_2 diventa 0, e il flusso risulta essere di costo minimo. Applicando infatti l'algoritmo SPT.L sul grafo residuo modificato (figura in basso a sinistra), a partire da un nodo radice fittizio collegato a ogni nodo del grafo originario mediante un arco di costo zero, si ottiene l'albero dei cammini minimi riportato nella figura in basso a destra. L'esistenza di tale albero dei cammini minimi certifica la non esistenza di cicli orientati negativi nel grafo residuo, ovvero la non esistenza di cicli aumentanti di costo negativo, e quindi l'ottimalità del flusso determinato.





3) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$. Il gestore della rete deve inviare un messaggio da un nodo sorgente $s \in N$ a un nodo destinazione $d \in N$. Per velocizzare l'invio, ed evitare conflitti lungo gli archi della rete, il gestore decide di suddividere il messaggio in due pacchetti, e di inviare i due pacchetti simultaneamente lungo due cammini disgiunti di G da s a d, ovvero lungo due cammini formati da insiemi di archi tra loro disgiunti.

Indicando con t_{ij} il tempo di transito di un pacchetto lungo l'arco (i, j), si formuli in termini di PLI il problema di individuare due cammini disgiunti del grafo, da s a d, lungo cui inviare i due pacchetti, in modo tale da minimizzare il massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in d (si assuma che il gestore invii simultaneamente i due pacchetti dal nodo s al tempo zero).

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti due famiglie di variabili di flusso:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se l'arco } (i,j) \in A \text{ è utilizzato per inviare il pacchetto } k \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A, k = 1, 2.$$

Introduciamo inoltre una variabile di soglia z, che rappresenta una valutazione superiore del massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in d.

Utilizzando le variabili introdotte, il problema può essere formulato mediante il seguente modello PLI:

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s, \\ 1 & \text{se } i = d, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N, k = 1, 2 \\ & x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \le 1 & (i,j) \in A \\ & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}^1 \le z & \\ & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}^2 \le z & \\ & x_{ij}^k \in \{0, 1\} & (i,j) \in A, k = 1, 2 \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, esprime la richiesta relativa all'individuazione di due cammini di G da s a d per l'invio dei due pacchetti. Il secondo blocco di vincoli garantisce che i due cammini utilizzati siano formati da sottoinsiemi di archi tra loro disgiunti. Infine, gli ultimi due vincoli definiscono z come una valutazione superiore sia del tempo di arrivo in d del primo pacchetto (lungo il primo cammino selezionato), sia del tempo di arrivo in d del secondo pacchetto (lungo il secondo cammino selezionato): minimizzando z, si minimizza pertanto il massimo dei tempi di arrivo dei due pacchetti in d.