RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Nome: Cognome:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: i) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; ii) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{ i \in N \ : \ A_i \xi > 0 \} = \{1\} \ ,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{ \lambda_i \ : \ i \in J \} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = \min\{ i \in J \ : \ \lambda_i = \bar{\lambda} \} = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{5\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_5 = 1 \ , \ k = 5$$

it.3) $B = \{1,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

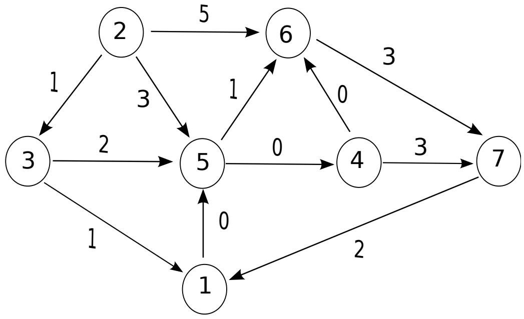
[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14, 0, 0, 0, 6)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. i) Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. ii) Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (3, 5)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $x = (3, 5)$ è $I(x) = \{1, 3, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale y, tale che $y^T A = c^T$, che formi con x una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_2 = y_4 = 0$. Affinché y sia ammissibile per (D), essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

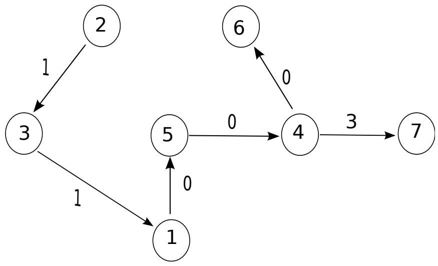
$$\begin{cases} y_1 \ -y_3 \ -2y_5 = 2 \\ -y_1 \ +y_3 \ +y_5 = -8 \\ y_1, \ \ y_3, \ \ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(14+\alpha, \alpha, 6)$, per $\alpha \geq 0$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (14 + \alpha, 0, \alpha, 0, 6)$, per $\alpha \geq 0$.

2) Si consideri il problema di determinare un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura:



2.1) Si verifichi se l'albero sotto riportato sia una soluzione ottima di tale problema:



2.2) Nel caso in cui il costo dell'arco $(6, 7)$ sia un parametro reale α (anzichè valere 3, come in figura), si determini per quali valori di tale parametro l'albero in figura sia un albero dei cammini minimi di radice 2, e per quali valori di α sia l'unico albero dei cammini minimi di radice 2. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

2.1) Sia d il vettore delle etichette associate ai nodi dell'albero in figura, indicato nel seguito mediante la notazione T. Si ha: $d(1) = 2$, $d(2) = 0$, $d(3) = 1$, $d(4) = 2$, $d(5) = 2$, $d(6) = 2$, $d(7) = 5$. L'albero è ottimo se e solo se valgono le condizioni di Bellman, ovvero se e solo se $d(i) + c_{ij} \geq d(j)$, $\forall (i, j) \notin T$. Poiché tali condizioni sono verificate, segue che T è un albero dei cammini minimi di radice 2.

2.2) Se il costo dell'arco $(6, 7)$ è pari a un parametro reale α, T è un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di α che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero per tutti e soli i valori di α tali che $d(6) + \alpha \geq d(7)$ (si osservi che, per gli archi restanti non appartenenti a T, le condizioni di Bellman valgono in quanto T è ottimo per $\alpha = 3$). Segue che T è un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se $\alpha \geq 3$. Poiché per $\alpha = 3$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(6, 7)$ sono soddisfatte in forma di uguaglianza, mentre per i restanti archi non appartenenti all'albero sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta, segue inoltre che T è l'unico albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di $\alpha > 3$. In particolare, per $\alpha = 3$ l'albero ottimo alternativo si ottiene inserendo l'arco $(6, 7)$ al posto di $(4, 7)$.