

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Nome: _____ Cognome: _____

1) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rcccccc} \max & 6x_1 & +10x_2 & +18x_3 & +10x_4 & +18x_5 & +2x_6 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

l’algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l’euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visita l’albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell’albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall’euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell’albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la migliore valutazione superiore e la migliore valutazione inferiore disponibili nel momento in cui l’esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con \bar{x} quella ottenuta dall’euristica. Indichiamo inoltre con \bar{z} la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con \underline{z} la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L’ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$.

Inizializzazione La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell’albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 34$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} = 30 > z = -\infty$, $z = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3 .

$x_3 = 1$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 24$. Siccome $\bar{z} < z = 30$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

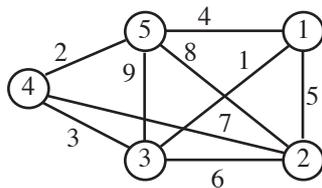
$x_3 = 0$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 33$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} = 30 = z = 30$, z non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2 .

$x_3 = 0, x_2 = 1$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 28 < z = 30$.

$x_3 = x_2 = 0$ $x^* = [2/3, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 32$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} = 30 = z = 30$, z non cambia. Siccome $\bar{z} = 32 > z = 30$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1 .

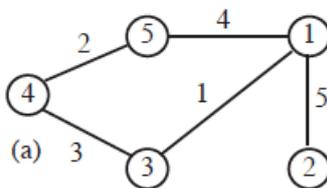
Poiché il massimo numero di livelli dell’albero è stato raggiunto, l’algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L’analisi dell’algoritmo Branch and Bound assicura che la miglior valutazione superiore nel momento in cui l’algoritmo viene interrotto è pari a $\max\{z, \max\{\bar{z}(P') : P' \in Q'\}\}$, dove Q' è l’insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q . In questo caso Q' contiene il solo nodo $x_3 = x_2 = 0$, pertanto tale miglior valutazione superiore è 32. La miglior valutazione inferiore è invece $z = 30$, pertanto il gap relativo a terminazione è $(32 - 30)/30 = 2/30 = 6.\bar{6}\%$. In effetti con semplici argomentazioni è facile dimostrare che il valore $z = 30$ è ottimo per il problema, e che quindi l’algoritmo ha determinato una soluzione ottima.

2) Si consideri l'istanza del problema TSP in figura. Si fornisca una valutazione inferiore del suo valore ottimo, mediante il rilassamento MS1T, e una valutazione superiore, mediante l'algoritmo euristico *nearest neighborhood*, eseguendo tale algoritmo a partire dal nodo 1. Si specifichi quindi l'intervallo di appartenenza del valore ottimo individuato mediante le due valutazioni. Come cambierebbe la risposta se il costo dell'arco (1,3) fosse 10 invece di 1? Giustificare le risposte.

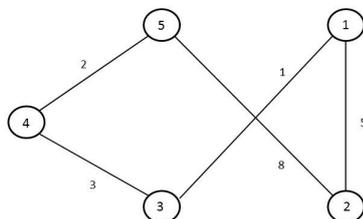


SVOLGIMENTO

Il rilassamento MS1T restituisce l'1-albero mostrato in figura (a). Viene quindi determinata la seguente valutazione inferiore del valore ottimo: $\underline{z} = 15$.



L'algoritmo euristico *nearest neighborhood*, a partire dal nodo 1, individua il ciclo Hamiltoniano sotto riportato. Viene determinata pertanto la seguente valutazione superiore del valore ottimo: $\bar{z} = 19$.



L'intervallo di appartenenza del valore ottimo individuato mediante le due valutazioni è quindi $[15, 19]$.

Se l'arco (1,3) costasse 10 invece di 1, il rilassamento MS1T individuerebbe il ciclo Hamiltoniano (1, 2, 3, 4, 5, 1), di costo 20. Essendo in tal caso 20 sia una valutazione inferiore che una valutazione superiore del valore ottimo, 20 sarebbe il valore ottimo del problema TSP per l'istanza modificata.