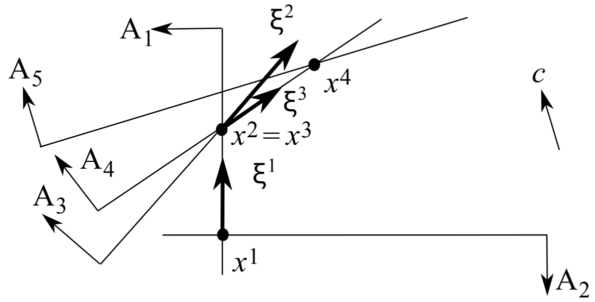
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente il problema di PL in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Si osservi che c è collineare ad A_5. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e di quella duale.



SVOLGIMENTO

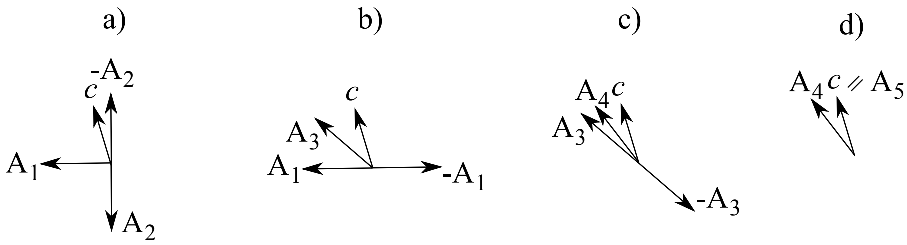
it. 1) $B = \{1, 2\}$: $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in a), quindi, $h = 2$. La base è primale non degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2\} = B$, e anche duale non degenere perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero (c è interno al cono generato da A_1 ed $-A_2$). Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 4, quindi $k = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $y_1 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ ed A_3, come mostrato in b), pertanto $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(x^2) = \{1, 3, 4\} \supset B$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base. Quindi $k = 4$ e si esegue un cambio di base degenere.

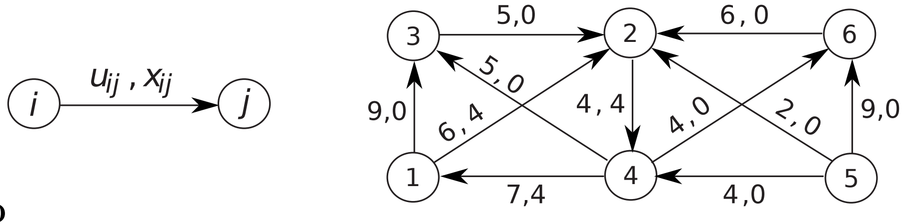
it. 3) $B = \{3, 4\}$: $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ ed A_4, come mostrato in c), quindi $h = 3$. La base continua a essere primale degenere e duale non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$.

it. 4) $B = \{4, 5\}$: $y_4 = 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato dal solo A_5 (essendo c collineare ad A_5), come mostrato in d). Quindi l'algoritmo termina avendo individuato in x^4 una soluzione ottima primale. La base è primale non degenere, in quanto $I(x^4) = \{4, 5\} = B$, ma duale degenere in quanto $y_4 = 0$.

La soluzione ottima primale non è unica. Infatti, poiché c è collinare ad A_5, sono ottime tutte le soluzioni appartenenti alla semiretta ammissibile, di origine x^4, individuata dall'iperpiano corrispondente al quinto vincolo. Di conseguenza, la soluzione ottima duale è unica. In una qualsiasi soluzione ottima primale, infatti, il vincolo 5 è l'unico attivo. Pertanto, per rispettare le condizioni degli scarti complementari, solamente la quinta componente può essere strettamente positiva in una qualsiasi soluzione ottima duale.

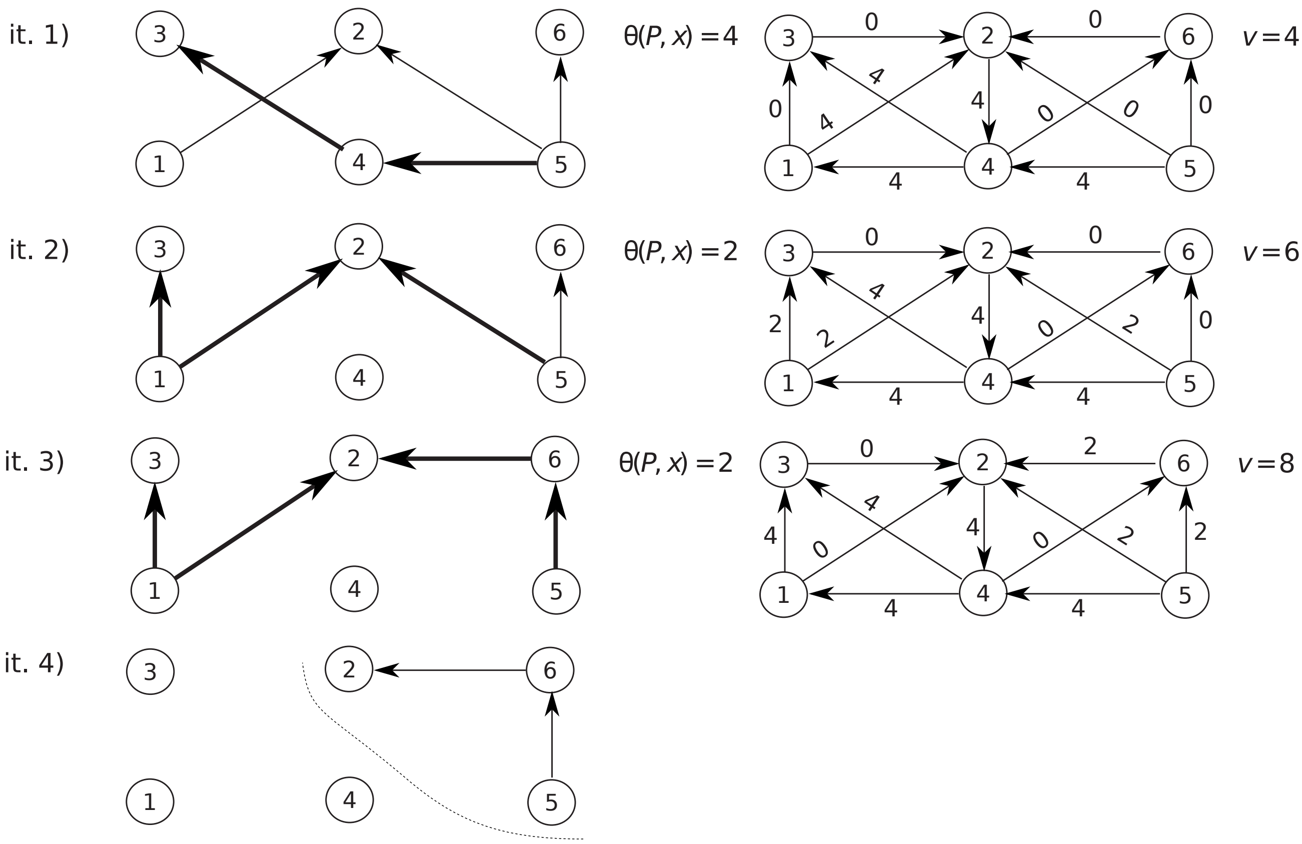


2) Si individui un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 3 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine, nel caso in cui la capacità dell'arco (5, 6) fosse un parametro reale positivo ϵ, per quali valori di ϵ il valore del flusso massimo resterebbe lo stesso determinato per lo scenario $u_{56} = 9$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione tranne l'ultima, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati). A destra viene invece riportato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo P di un flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$ del cammino aumentante, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{2, 5, 6\}, \{1, 3, 4\})$ determinato dall'algoritmo nel corso dell'ultima iterazione: i nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo, mentre $N_t = N \setminus N_s$. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{54} = 4 + 4 = 8 = v$.



Per valori di $\epsilon \geq 2$, il valore del flusso massimo risulta invariato, ovvero è sempre pari a 8. Il flusso individuato dall'algoritmo, di valore 8, continua infatti a essere ammissibile, ed è massimo a causa del taglio $(N_s, N_t) = (\{2, 5, 6\}, \{1, 3, 4\})$, che continua ad avere capacità minima pari a 8. Per valori di $\epsilon < 2$, invece, il valore del flusso massimo risulta inferiore a 8, in quanto la capacità del taglio $(\{5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\})$ risulta essere $u_{52} + u_{54} + u_{56} = 4 + 2 + \epsilon < 8$.

3) Il gruppo commerciale *UNI-TOSC* decide di aprire m punti vendita per rifornire n clienti. Sia u_j il massimo numero di clienti che il punto vendita j è in grado di rifornire, e sia c_{ij} il costo di servizio sostenuto dal punto vendita j nel caso in cui rifornirà il cliente i, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Tramite un'indagine di mercato, *UNI-TOSC* stima il coefficiente di soddisfacimento, s_{ij}, del cliente i nel caso in cui verrà rifornito dal punto vendita j. Per cercare di favorire il soddisfacimento dei clienti, *UNI-TOSC* decide di far pagare a ogni punto vendita j una penalità p_j nel caso in cui il soddisfacimento totale dei clienti da esso riforniti risulterà inferiore a una soglia prefissata S.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di assegnare gli n clienti agli m punti vendita in modo che ogni cliente sia rifornito da esattamente un punto vendita e i vincoli di capacità siano rispettati, minimizzando il costo complessivo sostenuto dai punti vendita, dato dai costi di servizio più le eventuali penalità legate al grado di scarso soddisfacimento dei clienti.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le seguenti variabili logiche:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ è assegnato al punto vendita } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se il punto vendita } j \text{ pagherà la penale,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Utilizzando tali variabili binarie si può proporre la seguente formulazione per il problema di *UNI-TOSC*:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} p_j y_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le u_j & j = 1, \ldots, m \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \ge S(1 - y_j) & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \\ & y_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Il primo blocco di vincoli stabilisce che ogni cliente sia assegnato a esattamente un punto vendita. Il secondo gruppo di vincoli rappresenta i vincoli di capacità relativi ai punti vendita. Il terzo gruppo di vincoli garantisce che, a livello di soluzione ottima, il punto vendita j pagherà la penale se e solo se il soddisfacimento totale dei clienti assegnati a j, $\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij}$, risulterà minore di S. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, è definita dalla somma dei costi di servizio e delle penalità.