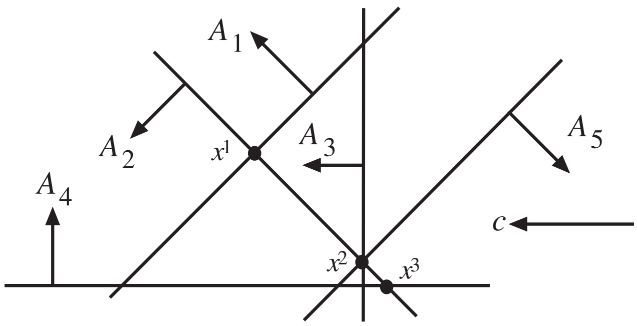
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il problema di PL in figura utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via geometrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che c ed A_3 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (direttamente in figura), la soluzione di base duale, l'indice entrante k, i segni delle componenti del vettore η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle basi visitate.

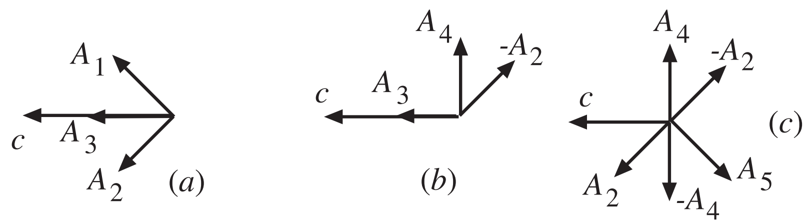


SVOLGIMENTO

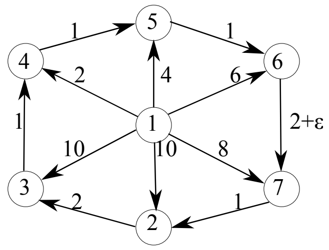
It. 1) $B = \{1, 2\}$: la soluzione di base primale (x^1 in figura) è non degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2\}$. Anche la soluzione di base duale è non degenere in quanto c non è collineare né con A_1 né con A_2, come mostrato in (a). In particolare sia y_1 che y_2 sono maggiori di zero. Si ha $k = \min\{i \in N : A_i x^1 > b_i\} = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. Inoltre, $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$, in quanto A_3 appartiene al cono finitamente generato da A_1 e A_2, come mostrato in (a). Poiché A_3 è collineare a c si ha che $y_1/\eta_1 = y_2/\eta_2$, e pertanto $h = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

It. 2) $B = \{2, 3\}$: la soluzione di base primale (x^2 in figura) è degenere (è attivo anche il quinto vincolo, non in base). Pure la soluzione di base duale è degenere in quanto, essendo c collineare ad A_3, si ha $y_2 = 0$ (mentre $y_3 > 0$). Inoltre, $k = \min\{i \in N : A_i x^2 > b_i\} = 4$. Infine, $\eta_2 < 0, \eta_3 > 0$ in quanto A_4 appartiene al cono finitamente generato da $-A_2$ ed A_3, come mostrato in (b). Pertanto $h = 3$.

It. 3) $B = \{2, 4\}$: la soluzione di base primale (x^3 in figura) è non degenere come pure la soluzione di base duale, essendo $y_2 > 0$ e $y_4 > 0$. Inoltre $k = \min\{i \in N : A_i x^3 > b_i\} = 5$. Poiché $\eta_2 < 0$ ed $\eta_4 < 0$, in quanto A_5 appartiene al cono finitamente generato da $-A_2$ ed $-A_4$, come mostrato in (c), l'algoritmo termina avendo determinato che il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto.



2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, fissando $\epsilon = 0$.



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta quindi ottimalità e unicità della soluzione individuata al variare di ϵ. Inoltre, si discuta per quali valori di ϵ il problema risulta inferiormente illimitato, giustificando tutte le risposte.

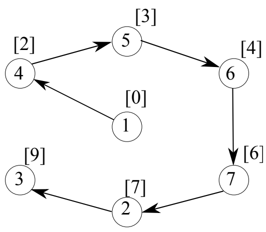
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo orientato $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 2)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 10 + 1 = 61.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	0	61	61	61	61	61	61	$\{1\}$
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	10	10	2	4	6	8	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
2	4	*nil*	1	1	1	4	1	1	0	10	10	2	3	6	8	$\{2, 3, 5, 6, 7\}$
3	5	*nil*	1	1	1	4	5	1	0	10	10	2	3	4	8	$\{2, 3, 6, 7\}$
4	6	*nil*	1	1	1	4	5	6	0	10	10	2	3	4	6	$\{2, 3, 7\}$
5	7	*nil*	7	1	1	4	5	6	0	7	10	2	3	4	6	$\{2, 3\}$
6	2	*nil*	7	2	1	4	5	6	0	7	9	2	3	4	6	$\{3\}$
7	3	*nil*	7	2	1	4	5	6	0	7	9	2	3	4	6	$\{\emptyset\}$

L'albero trovato è mostrato in figura:

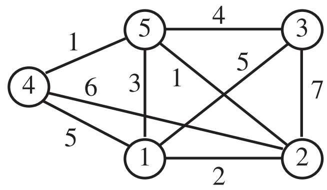


Al variare di ϵ le etichette dei nodi 2, 3 e 7 variano nel modo seguente: $d_2 = 7 + \epsilon$, $d_3 = 9 + \epsilon$ e $d_7 = 6 + \epsilon$. Occorre quindi verificare per quali valori di ϵ gli archi del grafo non appartenenti all'albero, e incidenti nei nodi 2, 3 e 7, ovvero $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 7)$ e $(3, 4)$, soddisfino le condizioni di Bellman, ovvero le condizioni di ottimalità per il problema dell'albero dei cammini minimi di radice data:

$$\left\{\begin{array}{rcl} d_1 + c_{12} & \geq & d_2 \\ d_1 + c_{13} & \geq & d_3 \\ d_1 + c_{17} & \geq & d_7 \\ d_3 + c_{34} & \geq & d_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 10 & \geq & 7 + \epsilon \\ 10 & \geq & 9 + \epsilon \\ 8 & \geq & 6 + \epsilon \\ 9 + \epsilon + 1 & \geq & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \epsilon & \leq & 3 \\ \epsilon & \leq & 1 \\ \epsilon & \leq & 2 \\ \epsilon & \geq & -8 \end{array}\right.$$

Segue che l'albero dei cammini minimi individuato resta ottimo se e solo se $-8 \leq \epsilon \leq 1$. Per $\epsilon = 1$ tale soluzione ottima non è unica: l'arco $(1, 3)$ può infatti sostituire $(2, 3)$, in quanto le condizioni di Bellman valgono in forma di uguaglianza. Per $\epsilon = -8$ l'albero individuato dall'algoritmo è invece l'unica soluzione ottima in quanto l'arco $(3, 4)$, che soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, non può essere inserito al posto di $(1, 4)$ in quanto non si ottiene un albero. Si osservi infine che, per $\epsilon < -8$, il costo del ciclo $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 2)$ diventa negativo, e il problema risulta quindi inferiormente illimitato.

3) Si risolva la seguente istanza del problema TSP mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo i con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti nell'1-albero di copertura di costo minimo individuato, si generino $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero di enumerazione in modo breadth-first. Inoltre, per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore, indicando se, e come, viene effettuato il branching, oppure se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Nel caso ciò non sia sufficiente a risolvere il problema, si stimi il gap relativo ottenuto quando l'algoritmo viene interrotto, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta in corrispondenza di ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 11$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata una soluzione ammissibile e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha quattro archi incidenti, e a generare sei figli, ciascuno dei quali è ottenuto fissando a zero le variabili corrispondenti a una delle possibili coppie dei seguenti archi: $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$ e $(4,5)$.

$\boxed{x_{15} = x_{25} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 17$, è mostrato in (b). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere col branching sul nodo 1, che ha tre archi incidenti.

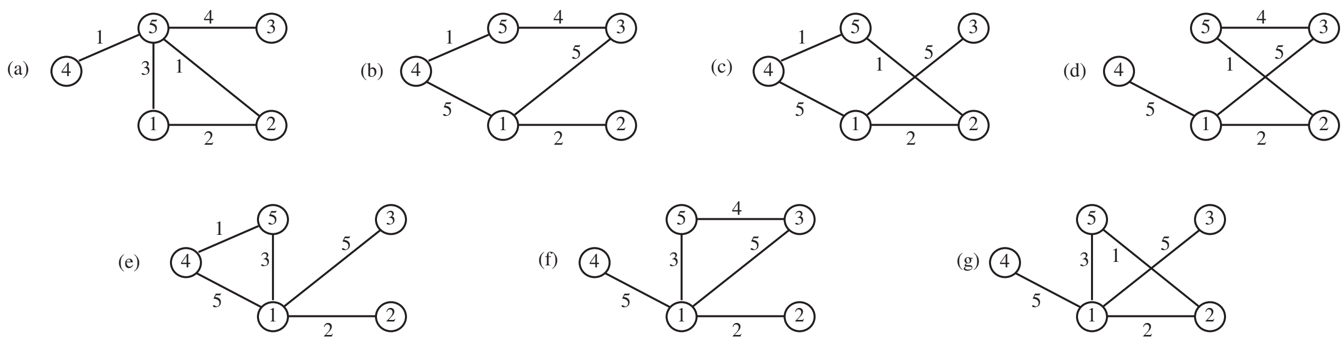
$\boxed{x_{15} = x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 14$, è mostrato in (c). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha tre archi incidenti.

$\boxed{x_{15} = x_{45} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 17$, è mostrato in (d). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha tre archi incidenti.

$\boxed{x_{25} = x_{35} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 16$, è mostrato in (e). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha quattro archi incidenti.

$\boxed{x_{25} = x_{45} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 19$, è mostrato in (f). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha quattro archi incidenti.

$\boxed{x_{35} = x_{45} = 0}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 16$, è mostrato in (g). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano occorre procedere con il branching relativamente al nodo 1, che ha quattro archi incidenti.



Poiché Q non è vuota, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che

$$\min\left\{\, z \;,\; \min\,\{\, \underline{z}(P') \;:\; P' \in Q' \,\}\,\right\}$$

è una valutazione inferiore globale corretta, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene tutti i nodi esaminati tranne il nodo radice, poiché nessuno è stato potato, e il minimo si ottiene in corrispondenza del nodo $x_{15} = x_{35} = 0$, per cui $\underline{z} = 14$. Pertanto, la valutazione inferiore globale è 14. Poiché $z = +\infty$, non essendo stata generata nessuna soluzione ammissibile per il problema, il gap relativo quando l'algoritmo viene interrotto è $+\infty$.