RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & & & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 0 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo di spostamento $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si individui 1) l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, 2) l'insieme di tutte le soluzioni ottime primali, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0, \quad \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = 6,$$

$$\eta_B^T = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 0,$$

$$h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = 4$$

it. 2) $B = \{2, 6\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0, \quad \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

$$\eta_B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1, \quad h = 2$$

it. 3) $B = \{3, 6\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N^T = 0, \quad \bar{y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP}.$$

$B = \{3, 6\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (-1, -4)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 0, 2)$ è una soluzione ottima per il problema duale.

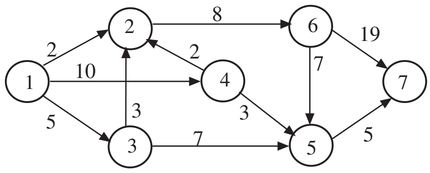
Per individuare l'insieme delle soluzioni ottime del problema duale, consideriamo il Duale Ristretto associato a $\bar{x}$. Poiché $I(\bar{x}) = \{1, 3, 6\}$ (la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è infatti degenere), il Duale Ristretto risulta essere:

$$(DR) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -y_1 & - & 2y_3 & + & y_6 & = & 0 \\ -y_1 & + & y_3 & & & = & 1 \\ y_1, & & y_3, & & y_6 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Posto $y_6 = \alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $((\alpha - 2)/3, (\alpha + 1)/3, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per il duale del problema dato per ogni $\alpha \geq 2$. Pertanto, $y(\alpha) = ((\alpha - 2)/3, 0, (\alpha + 1)/3, 0, 0, \alpha)$, $\alpha \geq 2$, è l'insieme di tutte e sole le soluzioni ottime del problema duale.

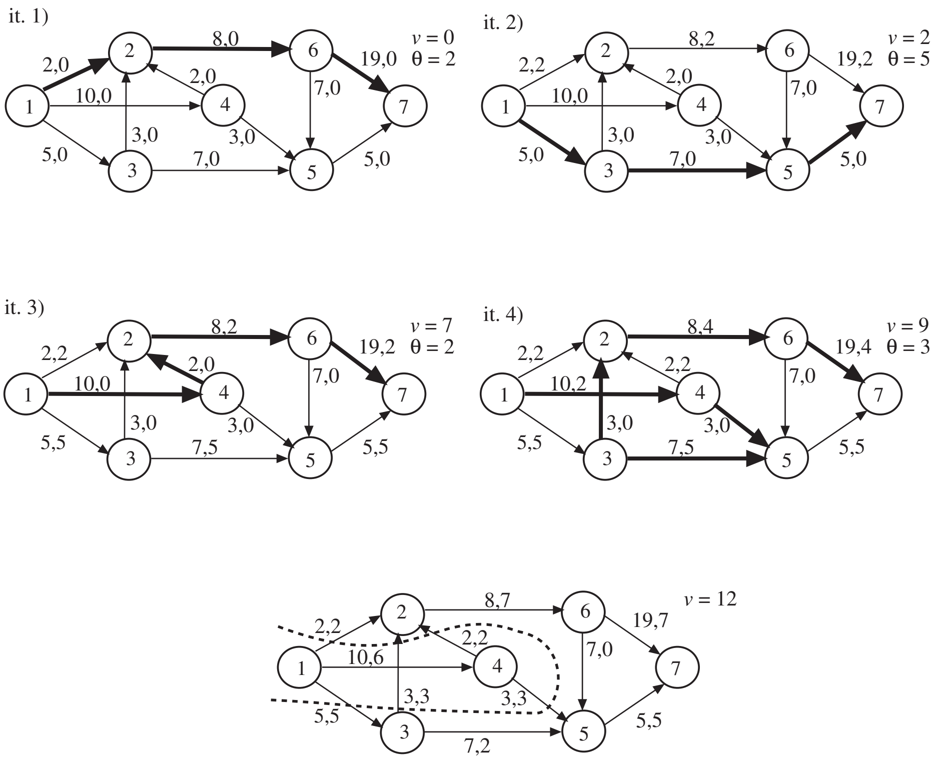
Per quanto riguarda invece l'insieme delle soluzioni ottime primali, poiché la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è non degenere, dalle condizioni degli scarti complementari segue che $\bar{x} = (-1, -4)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale.

2) Si risolva il problema di flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Per ogni iterazione si riporti il flusso x determinato, il suo valore v, il cammino aumentante individuato e la sua capacità θ. Al termine si riporti il taglio minimo determinato dall'algoritmo e la sua capacità.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono mostrate in figura, dall'alto in basso e da sinistra a destra. Il secondo numero associato a ogni arco indica il flusso lungo l'arco. Gli archi evidenziati indicano il cammino aumentante selezionato. Nell'ultima figura in basso è mostrato il flusso ottimo determinato. La linea tratteggiata indica il taglio $(N_s, N_t) = (\{1,4\}, \{2,3,5,6,7\})$ determinato dall'algoritmo nel corso dell'ultima iterazione: i nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo, mentre $N_t = N \setminus N_s$. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{13} + u_{42} + u_{45} = 2 + 5 + 2 + 3 = 12 = v$.



3) L'agenzia turistica Tour deve organizzare un viaggio, da Roma (r) a Torino (t), composto da esattamente k tappe intermedie. L'agenzia ha individuato un insieme N_1 di possibili località da visitare come prima tappa intermedia, un insieme N_2 di possibili località da visitare come seconda tappa intermedia, e così via fino a un insieme N_k di possibili località da visitare come ultima tappa intermedia prima di recarsi a Torino e terminare il viaggio. Definendo $N_0 = \{r\}$ e $N_{k+1} = \{t\}$, sia $G = (N, A)$ il grafo orientato a livelli che descrive la rete logistica pertinente per l'organizzazione del viaggio, tale che $N = \cup_{h=0}^{k+1} N_h$, mentre A contiene tutti e soli gli archi che connettono ciascun nodo in N a tutti i nodi del livello successivo, ossia $A = \{(i,j) : i \in N_h, j \in N_{h+1}, h = 0, \dots, k\}$. Per ogni $(i,j) \in A$, è noto il costo c_{ij} per viaggiare da i a j (comprensivo del costo di pernottamento in j).

Per rendere più gradevoli le tratte del viaggio, ovvero ogni spostamento tra due tappe consecutive, Tour dispone di $m \geq k$ animatori. Per ogni tratta va selezionato un animatore, con il vincolo che ciascun animatore può essere impiegato lungo al più una tratta. Impiegare l'animatore p lungo la tratta (i,j) comporta per l'agenzia un costo c_{ij}^p, $p = 1, \dots, m$, $(i,j) \in A$.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere quali tappe intermedie effettuare, ovvero quali tratte percorrere, e quale animatore selezionare per ogni tratta del viaggio, in modo da minimizzare il costo complessivo sostenuto dall'agenzia.

SVOLGIMENTO

Per ogni $(i,j) \in A$, introduciamo la variabile binaria

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se la località } j \text{ è visitata subito dopo la località } i, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $(i,j) \in A$ e $p = 1, \dots, m$ introduciamo la variabile binaria

$$y_{ij}^p = \begin{cases} 1, & \text{se l'animatore } p \text{ viene selezionato per la tratta } (i,j), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando tali variabili binarie, il problema di Tour può essere formulato nel modo seguente:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \left(c_{ij} x_{ij} + \sum_{p=1}^{m} c_{ij}^p y_{ij}^p \right)$$

$$\sum_{(j,i) \in A} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } i = r, \\ 1, & \text{se } i = t, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N$$

$$\sum_{p=1}^{m} y_{ij}^p = x_{ij} \quad (i,j) \in A$$

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^p \leq 1 \quad p = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$$

$$y_{ij}^p \in \{0,1\} \quad p = 1, \dots, m, (i,j) \in A$$

Il primo blocco di vincoli, di conservazione di flusso, impone che venga selezionato un cammino orientato da r a t in G. Grazie alla struttura del grafo, a livelli, tale cammino risulta composto da esattamente k nodi intermedi, ovvero visita esattamente una località per ciascuno degli insiemi N_h, $h = 1, \dots, k$, come richiesto. Il secondo blocco di vincoli impone la selezione di un animatore per ogni tratta del viaggio. Si osservi che, se (i,j) non costituisce una tratta del viaggio, ovvero $x_{ij} = 0$, allora nessun animatore viene associato a (i,j). Il terzo blocco di vincoli, infine, garantisce che ogni animatore sia impiegato in al più una tratta.