RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i)* si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii)* si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 3$, $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1\} \ ,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ J = \{4\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_4 = 1 \ , \ k = 4$$

it.3) $B = \{1,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

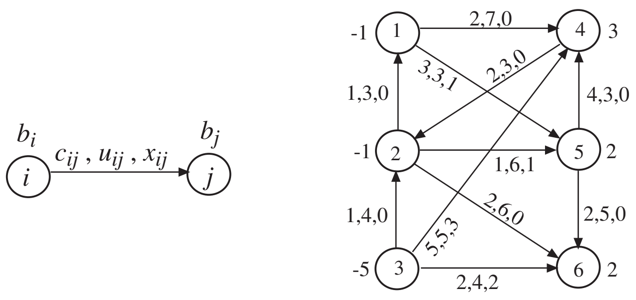
Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14, 0, 0, 6, 0)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. *i)* Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. *ii)* Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (3, 5)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $x = (3, 5)$ è $I(x) = \{1, 4, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale y, tale che $y^T A = c^T$, che formi con x una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_2 = y_3 = 0$. Affinché y sia ammissibile per (D), essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \ \ y_1 \ -2y_4 \ -y_5 = 2 \\ -y_1 \ +y_4 \ +y_5 = -8 \\ \ \ y_1, \ \ y_4, \ \ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(14+\alpha, 6, \alpha)$, per $\alpha \geq 0$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (14 + \alpha, 0, 0, 6, \alpha)$, per $\alpha \geq 0$.

2) Si risolva il problema di flusso di costo minimo, per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo basato su cancellazione di cicli a partire dal flusso ammissibile indicato, di costo $c^T x = 23$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo aumentante determinato con il relativo verso, costo e capacità, e si indichi il flusso ottenuto con il corrispondente costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

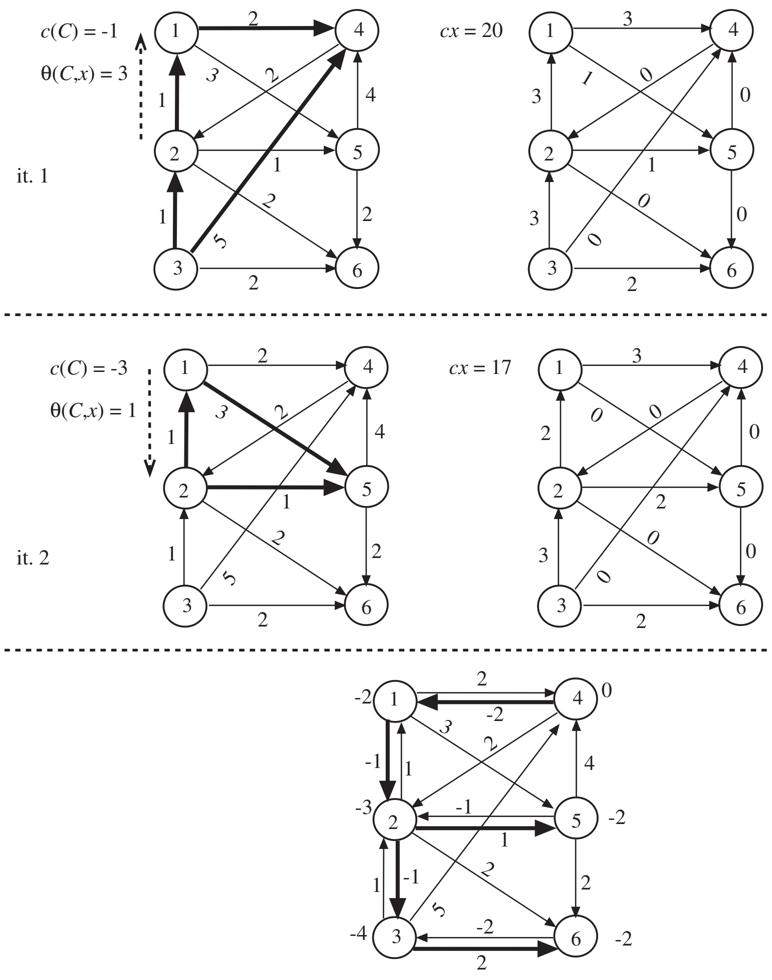
(Suggerimento: si inizi la ricerca del primo ciclo aumentante a partire dal nodo 3)



SVOLGIMENTO

L'algoritmo esegue le due iterazioni mostrate nel seguito. A sinistra è mostrato il ciclo C individuato (archi in grassetto, sul grafo originale) con il suo verso (freccia tratteggiata), il suo costo $c(C)$ e la sua capacità $\theta(C, x)$. A destra è mostrato il flusso x determinato dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il relativo costo $c^T x$.

Nell'ultima figura è mostrato il grafo residuo relativo all'ultimo flusso determinato, dove è evidenziato un albero dei cammini minimi (archi in grassetto) avente come radice un nodo fittizio collegato a costo zero ai nodi del grafo originale (il nodo radice e gli archi di collegamento non sono mostrati in figura). Tale albero è ottimo, come si può verificare grazie alle etichette riportate, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto al flusso individuato, che quindi è ottimo.



3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
\max & 8x_1 & +9x_2 & +4x_3 & +2x_4 & +2x_5 & & \\
 & 7x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +4x_4 & +7x_5 & \leq & 12 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

mediante l'algoritmo di Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visitando l'albero di enumerazione in modo *depth-first* (Q è pertanto uno stack) e, tra i figli di uno stesso nodo, inserendo per primo nello stack quello ottenuto fissando la variabile frazionaria a 1 (quindi, estraendo per primo il figlio ottenuto fissando la variabile frazionaria a 0). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, oppure se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la miglior valutazione inferiore determinata. Si noti che le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

Inizializzazione: L'insieme Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

1^a **iterazione**: Da Q viene estratto il nodo radice. Risolvendo il rilassamento continuo si ottiene $x^* = [1, 5/9, 0, 0, 0]$, $\bar{z} = 13$, mentre l'euristica Greedy CUD determina $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 12$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si pone $z = 12$. Inoltre, poiché $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

2^a **iterazione**: Nello stack Q sono presenti i due figli del nodo radice. Per la modalità di inserimento nello stack dei figli di uno stesso nodo, in testa allo stack è presente il nodo ottenuto fissando $x_2 = 0$, che viene quindi estratto. Risolvendo il corrispondente rilassamento continuo si ottiene $x^* = [1, 0, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 12$. La soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, e quindi il nodo viene chiuso per ottimalità. Il nodo sarebbe comunque stato chiuso perchè $\bar{z} = 12 \leq z = 12$.

3^a **iterazione**: In Q è presente il solo nodo ottenuto fissando $x_2 = 1$, che viene pertanto estratto. Risolvendo il corrispondente rilassamento continuo si ottiene $x^* = [3/7, 1, 0, 0, 0]$, $\bar{z} = 12 + 3/7$. Si osservi che la valutazione superiore può essere arrotondata per difetto al valore 12 in quanto i costi dell'istanza sono interi. L'euristica Greedy CUD determina invece $\bar{x} = [0, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 9$ (e quindi z non viene aggiornata). Poichè $\bar{z} = 12 \leq z = 12$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché $Q = \emptyset$, la visita dell'albero di enumerazione è conclusa, e l'algoritmo termina avendo risolto all'ottimo l'istanza data. La soluzione ottima individuata è $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 0]$, di costo 12.