RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 1, \quad B(h) = 1,$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{3, 4\},$$

$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = \lambda_3 = \lambda_4 = 4, \quad k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = \min\{3, 4\} = 3$ [regola anticiclo di Bland]

it.2) $B = \{2, 3\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 2, \quad B(h) = 1,$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$J = \{4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = 0, \quad k = 4$ [cambio di base degenere]

it.3) $B = \{3, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix},$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = 3, \quad B(h) = 1,$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere]

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema dato è superiormente illimitato e di conseguenza il suo duale è vuoto.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & x_1 & + & (1-\alpha)x_2 & - & \alpha x_3 & & \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \end{array}$$

2.1) Si determinino i valori del parametro α per i quali $\hat{x} = (0,0,0)$ è una soluzione ottima del problema. **2.2)** Si determinino i valori del parametro α per i quali $\bar{x} = (1,1,-1)$ è soluzione ottima. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

2.1) Poiché $I(\hat{x}) = \emptyset$, $\hat{x}$ è un punto interno della regione ammissibile del problema dato. Inoltre, il vettore dei costi è diverso dal vettore zero per qualsiasi valore del parametro α. Segue che $\hat{x}$ non può essere soluzione ottima del problema dato per qualsiasi valore di α.

2.2) Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I = I(\bar{x}) = \{3,6\}$, il Duale Ristretto associato a $\bar{x}$

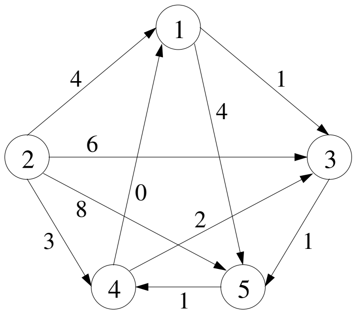
$$(DR) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_I^T A_I & = & c^T \\ y_I & \geq & 0 \end{array} \right.$$

risulta essere:

$$(DR) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2y_3 & + & y_6 & = & 1 \\ y_3 & + & y_6 & = & 1-\alpha \\ -y_3 & & & = & -\alpha \\ y_3, & & y_6 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Il sistema di equazioni ammette come unica soluzione $(y_3, y_6) = (\alpha, 1-2\alpha)$. Tale soluzione ha componenti non negative se e solo se $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Quindi (DR) ha soluzione se e solo se il parametro α appartiene all'intervallo $[0, 1/2]$. Di conseguenza, $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema dato se e solo se $\alpha \in [0, 1/2]$.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. **3.1)** L'albero dei cammini minimi individuato è unico? **3.2)** Se il costo dell'arco (3,5) fosse un parametro reale β, invece di valere 1 come in figura, per quali valori di β l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 2? Giustificare tutte le risposte.



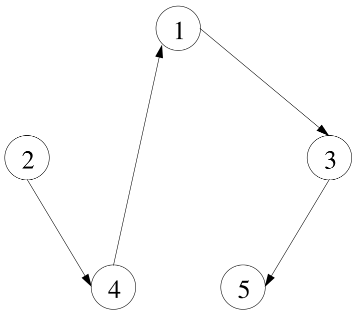
SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo orientato $(3, 5, 4)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, cioè l'algoritmo SPT.S in cui l'insieme Q è implementato come una coda di priorità, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 4 \times 8 + 1 = 33.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	33	0	33	33	33	$\{2\}$
1	2	2	*nil*	2	2	2	4	0	6	3	8	$\{1,3,4,5\}$
2	4	4	*nil*	4	2	2	3	0	5	3	8	$\{1,3,5\}$
3	1	4	*nil*	1	2	1	3	0	4	3	7	$\{3,5\}$
4	3	4	*nil*	1	2	3	3	0	4	3	5	$\{5\}$
5	5	4	*nil*	1	2	3	3	0	4	3	5	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi individuato è mostrato in figura.



3.1) La soluzione trovata è unica in quanto tutti gli archi non appartenenti all'albero soddisfano le condizioni di Bellman come disuguaglianza stretta, ovvero $d[i] + c_{ij} > d[j]$ per ogni arco (i, j) non appartenente all'albero.

3.2) Se il costo dell'arco $(3, 5)$ fosse un parametro reale β, l'etichetta del nodo 5 varrebbe $d(5) = 4 + \beta$. L'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di β per cui valgono le condizioni di Bellman. In tal caso, è sufficiente imporre tale condizioni per gli archi non appartenenti all'albero e incidenti il nodo 5:

1. $(1, 5)$: $d[1] + 4 \geq d[5]$, ovvero $3 + 4 \geq 4 + \beta$, ovvero $\beta \leq 3$
2. $(2, 5)$: $d[2] + 8 \geq d[5]$, ovvero $0 + 8 \geq 4 + \beta$, ovvero $\beta \leq 4$
3. $(5, 4)$: $d[5] + 1 \geq d[4]$, ovvero $4 + \beta + 1 \geq 3$, ovvero $\beta \geq -2$

Segue che, se il costo dell'arco $(3, 5)$ fosse un parametro reale β, l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se $-2 \leq \beta \leq 3$.