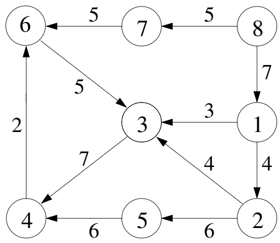
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome:

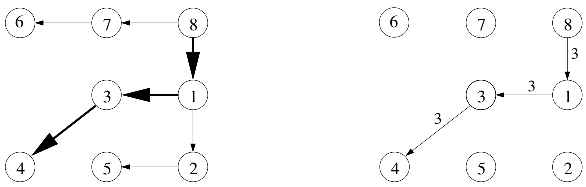
1) Si individui un flusso massimo dal nodo 8 al nodo 4, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Come cambierebbe il valore del flusso massimo se la capacità dell'arco $(3,4)$ fosse un parametro intero $\epsilon > 7$? Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione tranne l'ultima viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo P di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo. Viene anche riportato il corrispondente valore di flusso v.

It. 1)

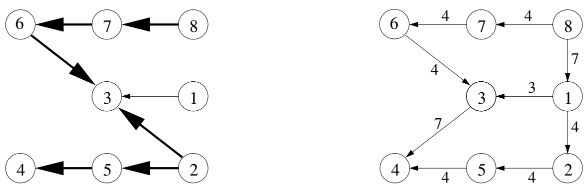


$\theta(P,x) = 3, \quad v = 3$

It. 2)

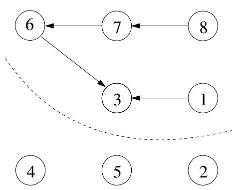
$\theta(P,x) = 4, \quad v = 7$

It. 3)



$\theta(P,x) = 4, \quad v = 11$

It. 4)



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato è massimo e il taglio $N_s = \{1,3,6,7,8\}$, $N_t = \{2,4,5\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{34} + u_{12} = 7 + 4 = 11$.

Se la capacità dell'arco $(3,4)$ fosse un parametro intero $\epsilon > 7$, il valore del flusso massimo sarebbe 12 per ogni valore di ϵ in tale insieme. Infatti, sarebbe possibile inviare una sola ulteriore unità di flusso lungo il cammino aumentante $(8,7,6,3,4)$, a causa del taglio $N'_s = \{8\}$, $N'_t = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, di capacità 12.

2) Si consideri la seguente formulazione

$$\max \left\{ \min_{i=1,\dots,n} c_i x_i \quad : \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \quad x_i \in \{0,5,7,12\}, \quad i = 1, ..., n \right\}$$

dove b, a_i e c_i, per $i = 1, ..., n$, sono dati di input. Si modifichi la formulazione in modo tale che il modello risultante sia espresso in termini di PLI, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

Ogni variabile a valori discreti x_i può essere modellata in termini di PLI introducendo tre variabili binarie y_i^1, y_i^2 e y_i^3 per indicare l'attribuzione a x_i del valore 5, 7, 12, rispettivamente. I vincoli non lineari

$$x_i \in \{0,5,7,12\}, \qquad i = 1, ..., n$$

possono pertanto essere modellati mediante:

$$\begin{aligned}
& x_i = 5y_i^1 + 7y_i^2 + 12y_i^3 && i = 1, ..., n \\
& y_i^1 + y_i^2 + y_i^3 \le 1 && i = 1, ..., n \\
& y_i^1, y_i^2, y_i^3 \in \{0,1\} && i = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Nel caso in cui $y_i^1 = y_i^2 = y_i^3 = 0$, il primo vincolo attribuisce alla variabile x_i il valore 0.

La funzione obiettivo non lineare

$$\min_{i=1,\dots,n} c_i x_i$$

può invece essere modellata in termini di PLI introducendo una variabile di soglia w, che stimi per difetto il minimo dei valori $c_i x_i$, e formulando

$$\max \min_{i=1,\dots,n} c_i x_i$$

mediante

$$\begin{aligned}
\max \quad & w \\
& c_i x_i \ge w \qquad i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Il modello matematico iniziale può essere quindi riformulato in termini di PLI nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\max \quad & w \\
& c_i x_i \ge w && i = 1, ..., n \\
& \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\
& x_i = 5y_i^1 + 7y_i^2 + 12y_i^3 && i = 1, ..., n \\
& y_i^1 + y_i^2 + y_i^3 \le 1 && i = 1, ..., n \\
& y_i^1, y_i^2, y_i^3 \in \{0,1\} && i = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Si osservi che il problema potrebbe essere formulato utilizzando esclusivamente le variabili y_i^h, $i = 1, ..., n$ e $h = 1, 2, 3$. Infatti, il terzo blocco di vincoli può essere utilizzato per eliminare le variabili x_i dai primi due gruppi di vincoli.

3) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & & \\ & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare una valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare una valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, e visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first (tra i figli di uno stesso nodo, si visiti per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1). Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi inoltre se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si consideri quindi la disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$. Si tratta di un piano di taglio per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è: x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3]$, $\bar{z} = 12$. Siccome $\bar{z} < z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 16 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1]$, $\bar{z} = 14$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} < z$.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 0}$ $x^* = [1, 0, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 15$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo può essere chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = z$.

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota. Di conseguenza, la soluzione $x = [1, 0, 0, 1, 1]$, di costo 15, è ottima per il problema.

La disuguaglianza $x_3 + x_4 \leq 1$ rappresenta un piano di taglio per il problema dato in quanto: 1) è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (gli oggetti 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino); 2) è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo (infatti $1/3 + 1 > 1$).