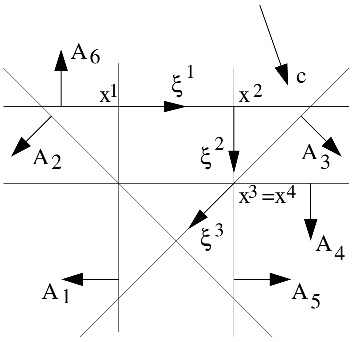
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente il problema di PL in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{1, 6\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle soluzioni di base visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e di quella duale.



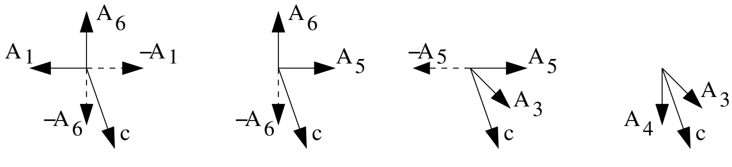
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 6\}$: $y_1 < 0$ e $y_6 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_6$, come mostrato in figura (a); quindi, risulta $h = \min\{1, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La soluzione di base primale è non degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 6\} = B$, come pure quella duale, perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero (c è interno al cono generato da $-A_1$ ed $-A_6$). Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$.

it.2) $B = \{5, 6\}$: $y_5 > 0$ e $y_6 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_5 e $-A_6$, come mostrato in figura (b); si ha quindi $h = 6$. Le soluzioni di base primale e duale sono entrambe non degeneri. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 4, quindi $k = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{3, 5\}$: $y_3 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e $-A_5$, come mostrato in figura (c); quindi $h = 5$. La soluzione di base primale è degenere, in quanto anche il vincolo 4 risulta attivo, mentre quella duale è non degenere. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere ponendo $k = 4$.

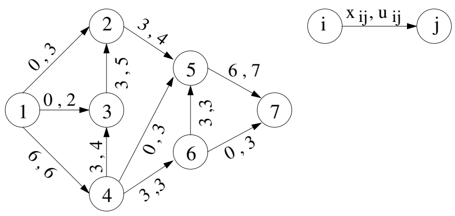
it.4) $B = \{3, 4\}$: $y_3 > 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e A_4, come mostrato in figura (d). La base è quindi duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale x^4. La soluzione di base primale è degenere, essendo invariata rispetto all'iterazione precedente, mentre quella duale è non degenere.



(a) (b) (c) (d)

La soluzione ottima primale è unica, come si può osservare per via geometrica. Tale proprietà segue anche dal fatto che la soluzione ottima duale determinata dall'algoritmo è non degenere. La soluzione ottima duale, invece, non è unica. Infatti, c appartiene al cono generato da A_4 e A_5, ovvero anche la soluzione duale ammissibile corrispondente alla base $\{4, 5\}$ è ottima. Si osservi che tale soluzione ottima duale è diversa da quella individuata dall'algoritmo.

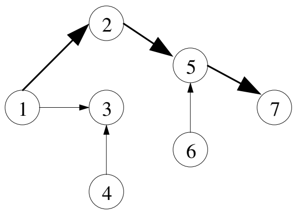
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura, di valore $v = 6$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Come cambierebbe il valore del flusso massimo nel caso in cui l'arco $(2, 5)$ dovesse essere rimosso dalla rete per via di un guasto, e non potesse quindi essere utilizzato per l'invio di flusso? Giustificare tutte le risposte.

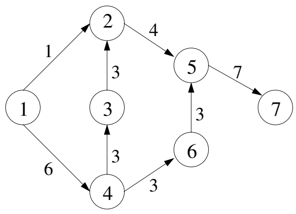


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione tranne l'ultima viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo P di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo. Viene infine riportato il corrispondente valore di flusso v.

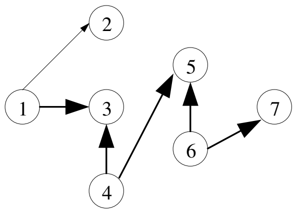
It. 1)

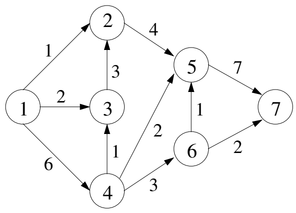




$\theta(P, x) = 1, \quad v = 7$

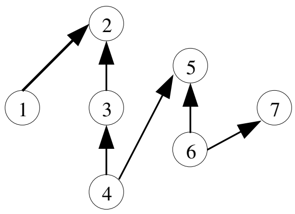
It. 2)

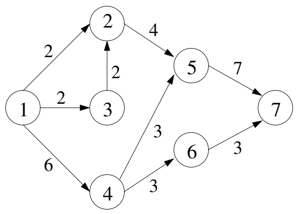




$\theta(P, x) = 2, \quad v = 9$

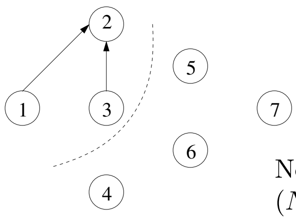
It. 3)





$\theta(P, x) = 1, \quad v = 10$

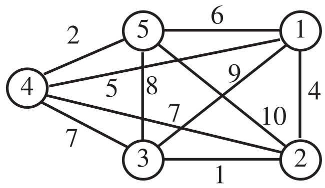
It. 4)



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato è massimo e il taglio $(N_s = \{1, 2, 3\},\ N_t = \{4, 5, 6, 7\})$ è di capacità minima:
$u(N_s, N_t) = u_{14} + u_{25} = 6 + 4 = 10 = v$.

Se l'arco $(2, 5)$ dovesse essere rimosso dalla rete, il valore del flusso massimo si ridurrebbe a 6. L'arco $(2, 5)$, infatti, è un arco diretto del taglio di capacità minima, $(\{1{,}2{,}3\}, \{4, 5, 6, 7\})$, determinato nel caso di rete integra. Pertanto, rimuovendo $(2, 5)$ tale taglio continua a essere di capacità minima anche per la rete ridotta. Per il Teorema Flusso Massimo-Taglio di Capacità Minima, segue che la capacità di tale taglio nella rete ridotta, ovvero 6, coincide con il valore di flusso massimo in assenza dell'arco $(2, 5)$.

3) Si risolva la seguente istanza del problema TSP mediante un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento e nessuna euristica. Si effettui il branching come segue: selezionato un nodo i con il più piccolo valore $r > 2$ di archi incidenti nell'1-albero di copertura di costo minimo individuato, si generino $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero di enumerazione in modo breadth-first, e si inseriscano in Q i figli generati a partire da i rispettando l'ordine crescente dell'estremo j dell'arco (i, j) la cui variabile è fissata a zero (nel caso $r = 3$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore, indicando se, e come, viene effettuato il branching, oppure se il nodo viene chiuso e perché. Si esplorino solamente i primi due livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Nel caso ciò non sia sufficiente a risolvere il problema, si stimi il gap relativo ottenuto quando l'algoritmo viene interrotto. Si consideri quindi la disuguaglianza $x_{15} + x_{14} + x_{45} \leq 2$. Si tratta di una disuguaglianza valida per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta in corrispondenza di ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 18$, è mostrato in (a). Poiché $\underline{z} < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre archi incidenti, e a generare tre figli, fissando a zero la variabile corrispondente a uno degli archi $(1, 2)$, $(1, 4)$ e $(1, 5)$.

$\boxed{x_{12} = 0}$ Un corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 21$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a generare tre figli, fissando a zero la variabile corrispondente a uno degli archi $(4, 1)$, $(4, 3)$ e $(4, 5)$.

$\boxed{x_{14} = 0}$ Un corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 20$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

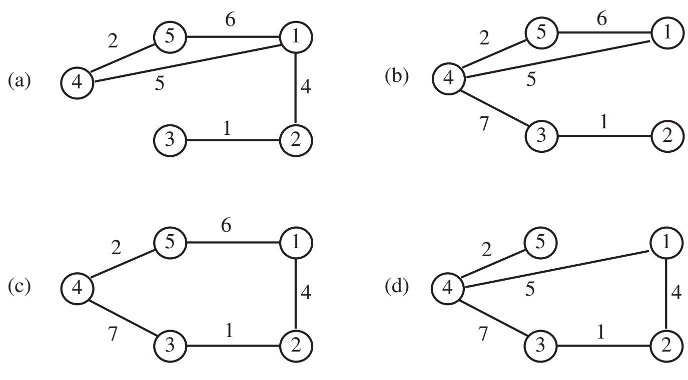
$\boxed{x_{15} = 0}$ Un corrispondente MS1T, di costo $\underline{z} = 19$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 19 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a generare tre figli, fissando a zero la variabile corrispondente a uno degli archi $(4, 1)$, $(4, 3)$ e $(4, 5)$.

Poiché sono stati esplorati i primi due livelli dell'albero delle decisioni, l'algoritmo viene interrotto anticipatamente, con Q non vuota. L'analisi dell'algoritmo Branch and Bound assicura che la valutazione inferiore globale nel momento in cui l'algoritmo viene interrotto è pari a

$$\min \left\{ \, z \; , \; \min \left\{ \, \underline{z}(P') \; : \; P' \in Q' \, \right\} \right\},$$

dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso, Q' contiene i nodi $x_{12} = 0$ e $x_{15} = 0$, e pertanto la valutazione inferiore globale è pari a $\min\{ 20 \, , \, \min\{ 21 \, , \, 19 \} \} = 19$. Il gap relativo nel momento in cui l'algoritmo viene interrotto è quindi

$$\frac{20 - 19}{19} \approx 5,3\%.$$



$x_{15} + x_{14} + x_{45} \leq 2$ è una disuguaglianza valida per il problema dato in quanto è soddisfatta da tutte le sue soluzioni ammissibili. Infatti, poiché $(1, 4, 5)$ è un ciclo che non include tutti i nodi del grafo, in qualsiasi soluzione ammissibile per TSP, ovvero in qualsiasi ciclo Hamiltoniano, almeno uno dei tre archi che compongono il ciclo non può essere presente. Si osservi che tale disuguaglianza è violata dalla soluzione del rilassamento MS1T eseguito in corrispondenza del nodo radice.