RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL, in cui γ è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & (-2-\gamma)x_1 & + & (-2+3\gamma)x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di γ per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il problema. Si consideri quindi la seguente variante del problema, la cui la funzione obiettivo è ottenuta da quella del primo problema di PL fissando $\gamma = 0$, e α è un ulteriore parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -2x_1 & - & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4-2\alpha \\ & x_1 & & & \leq & 2-\alpha \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1+\alpha \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Si individui l'insieme di valori di α per cui $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per tale secondo problema di PL. Si fissi infine $\alpha = 0.5$ nel secondo problema di PL, e si determini l'insieme delle soluzioni ottime duali in tale scenario. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Consideriamo il primo problema di PL e determiniamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i primi tre vincoli del problema. Determiniamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro γ:

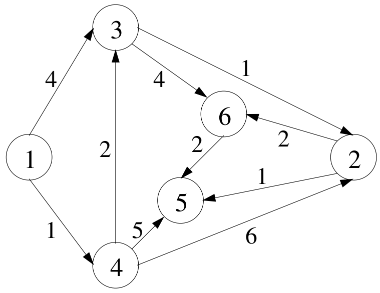
$$y_B = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} (-2-\gamma) & (-2+3\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\gamma & 2+\gamma \end{bmatrix}, \quad y_N = 0, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4\gamma & 2+\gamma \end{bmatrix}.$$

$B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $y_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\gamma \in [-2, 0]$. Quindi, $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il primo problema di PL se e solo se $\gamma \in [-2, 0]$.

Consideriamo ora il secondo problema di di PL. La base $B = \{4, 5\}$ è una base duale ammissibile per tale problema, in quanto il vettore dei costi di tale problema si ottiene dal vettore dei costi del problema di PL precedentemente considerato fissando $\gamma = 0$. La soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$ è $x = (1, 0)$, come nel caso precedente. Tale soluzione è primale ammissibile se e solo se essa soddisfa anche i vincoli fuori base, vale a dire i primi tre vincoli del problema. È immediato verificare che ciò accade se e solo se $\alpha \in [0, 1]$. Quindi, $B = \{4, 5\}$ è una base ottima per il secondo problema di PL se e solo se $\alpha \in [0, 1]$.

Fissiamo infine $\alpha = 0.5$ nel secondo problema di PL. In base ai risultati appena presentati, in tale scenario $B = \{4, 5\}$ è una base ottima. Poiché la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{4, 5\}$, ovvero $x = (1, 0)$, è non degenere nello scenario $\alpha = 0.5$, dal Teorema degli Scarti Complementari segue che l'unica soluzione ottima duale nel caso $\alpha = 0.5$ è $(0, 0, 0, 0, 2)$.

2) Si determini un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si riportino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta quindi se l'albero determinato resterebbe ottimo nel caso in cui, dopo la sua individuazione, venisse aggiunto al grafo l'arco $(5, 3)$ di costo -2.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

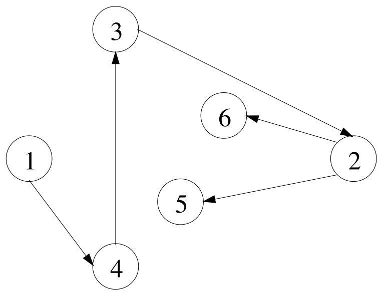
originale	1	2	3	4	5	6
nuova numerazione	1	4	3	2	6	5

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ anche in presenza di archi di costo negativo. Si ricordi che tale algoritmo non necessita dell'insieme dei nodi candidati Q. Nello svolgimento vengono utilizzati i nomi dei nodi dopo la rinumerazione.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31.$$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	31	31	31	31	31
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	1	4	31	31	31
2	2	*nil*	1	2	2	1	2	0	1	3	7	31	6
3	3	*nil*	1	2	3	3	2	0	1	3	4	7	6
4	4	*nil*	1	2	3	4	4	0	1	3	4	6	5
5	5	*nil*	1	2	3	4	4	0	1	3	4	6	5

L'albero dei cammini minimi individuato, sul grafo originale, è mostrato in figura:



Se al grafo in figura venisse aggiunto l'arco $(5, 3)$, di costo -2, l'albero individuato continuerebbe a essere un albero dei cammini minimi di radice 1, in quanto le condizioni di Bellman relative al nuovo arco sarebbero soddisfatte in forma di uguaglianza. Facendo riferimento alla nuova numerazione dei nodi, si avrebbe infatti $d(6) - 2 = 5 - 2 = 3 = d(3)$. Si osservi che $(5, 3)$ non potrebbe sostituire $(4, 3)$ nell'albero individuato in quanto tale scambio determinerebbe una struttura che non è un albero.

3) Uno studente del corso di laurea in Matematica deve recarsi in un centro commerciale per l'acquisto di un nuovo computer. Dopo aver esaminato la cartina stradale, descritta mediante un grafo orientato $G = (N, A)$, decide di recarsi o al centro Uneur, situato nel nodo $t_1 \in N$, oppure al centro Mworld, situato nel nodo $t_2 \in N$. Lo studente si pone quindi il problema di individuare un percorso in G dal nodo s, dove si trova la sua abitazione, fino al nodo t_1 oppure fino al nodo t_2. Noto il tempo di viaggio t_{ij} associato a ogni collegamento $(i, j) \in A$, lo studente vuole individuare un percorso il cui tempo complessivo di viaggio non superi un tempo massimo prefissato T.

Indicando con c_{ij} il costo di attraversamento di ogni collegamento $(i, j) \in A$, si formuli in termini di *PLI* il problema di individuare un cammino orientato che parta da s e arrivi o al nodo t_1 oppure al nodo t_2, il cui tempo di viaggio non superi T e che abbia costo totale di attraversamento minimo.

SVOLGIMENTO

Per formulare il problema, introduciamo le seguenti variabili binarie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i,j) \in A \text{ fa parte del percorso scelto dallo studente,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A.$$

Introduciamo inoltre una variabile booleana, y, per decidere se il percorso avrà il nodo t_1 oppure il nodo t_2 come nodo destinazione:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{se il percorso ha } t_1 \text{ come nodo destinazione,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La richiesta di individuare un cammino orientato in G dal nodo s al nodo t_1 oppure al nodo t_2 può essere quindi espressa mediante la seguente generalizzazione dei vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1, & i = s \\ y, & i = t_1 \\ 1 - y, & i = t_2 \\ 0, & i \in N, i \neq s, t_1, t_2, \end{cases} \qquad i \in N.$$

Il vincolo relativo al tempo complessivo di viaggio può invece essere espresso mediante:

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} \leq T.$$

La funzione obiettivo, da minimizzare, è $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$. Il risultante modello *PLI* è pertanto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1, & i = s \\ y, & i = t_1 \\ 1 - y, & i = t_2 \\ 0, & i \in N, i \neq s, t_1, t_2 \end{cases} \qquad i \in N \\ & \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij} \leq T \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i,j) \in A \\ & y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$