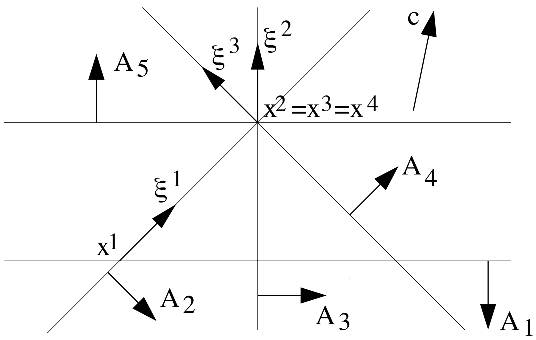
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2023/24)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente il problema di PL in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima primale e di quella duale. Giustificare tutte le risposte.



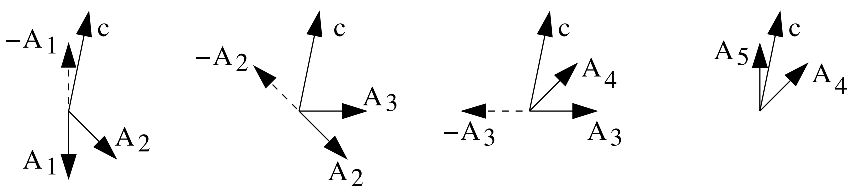
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_2, come mostrato in figura (a). Si ha quindi $h = 1$. La base è sia primale ($I(x^1) = B$) che duale non degenere ($y_1, y_2 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3, 4 e 5, quindi $k = \min\{3, 4, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

it.2) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ e A_3, come mostrato in figura (b). Si ha quindi $h = 2$. La base è primale degenere ($I(x^2) = \{2, 3, 4, 5\}$), ma duale non degenere ($y_2, y_3 \neq 0$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 4 e 5, attivi ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = \min\{4, 5\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e A_4, come mostrato in figura (c). Si ha quindi $h = 3$. La base è duale non degenere ($y_3, y_4 \neq 0$), ma è primale degenere ($I(x^3) = \{2, 3, 4, 5\}$). Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 5$.

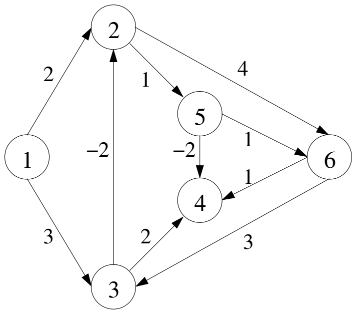
it.4) $B = \{4, 5\}$, $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_4 e A_5, come mostrato in figura (d). La la base è quindi duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo individuato la soluzione ottima primale x^4. La base è primale degenere ($I(x^4) = \{2, 3, 4, 5\}$) ma duale non degenere ($y_4, y_5 \neq 0$).



(a) (b) (c) (d)

La soluzione ottima primale è unica, come si può osservare per via geometrica. Tale proprietà segue anche dal fatto che la soluzione ottima duale determinata dall'algoritmo è non degenere. La soluzione ottima duale, invece, non è unica. Infatti, c appartiene al cono generato da A_3 e A_5, ovvero anche la soluzione duale ammissibile corrispondente alla base $\{3, 5\}$ è ottima. Si osservi che tale soluzione ottima duale è diversa da quella individuata dall'algoritmo.

2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. In ogni iterazione si visitino gli archi in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. **2.1)** L'albero dei cammini minimi di radice 1 è unico? **2.2)** Se il costo dell'arco (5,4) fosse un parametro reale β, invece di valere -2 come in figura, per quali valori di β l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare tutte le risposte.



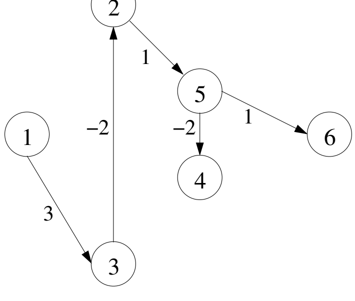
SVOLGIMENTO

Essendo presenti sia archi di costo negativo che cicli orientati (si consideri ad esempio $(2, 6, 3, 2)$), l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Bellman, cioè l'algoritmo SPT.L in cui la lista Q è implementata come una coda, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 4 + 1 = 21.$

it.	u	$p[\cdot]$						$d[\cdot]$						Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	21	21	21	21	21	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	2	3	21	21	21	$(2,3)$
2	2	*nil*	1	1	1	2	2	0	2	3	21	3	6	$(3,5,6)$
3	3	*nil*	3	1	3	2	2	0	1	3	5	3	6	$(5,6,2,4)$
4	5	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	1	3	4	$(6,2,4)$
5	6	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	1	3	4	$(2,4)$
6	2	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	1	2	4	$(4,5)$
7	4	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	1	2	4	(5)
8	5	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	0	2	3	$(4,6)$
9	4	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	0	2	3	(6)
10	6	*nil*	3	1	5	2	5	0	1	3	0	2	3	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi individuato è mostrato nel seguito:



2.1) L'albero dei cammini minimi di radice 1 è unico in quanto tutti gli archi non appartenenti all'albero individuato soddisfano le condizioni di Bellman come disuguaglianza stretta, ovvero $d[i] + c_{ij} > d[j]$ per ogni arco (i,j) non appartenente all'albero.

2.2) Se il costo dell'arco $(5,4)$ fosse un parametro reale β, l'etichetta del nodo 4 varrebbe $d(4) = 2 + \beta$. L'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 1 per tutti e soli i valori di β per cui valgono le condizioni di Bellman. In tal caso, è sufficiente imporre tale condizioni per gli archi non appartenenti all'albero e incidenti il nodo 4:

1. $(3,4)$: $d[3] + 2 \geq d[4]$, ovvero $3 + 2 \geq 2 + \beta$, ovvero $\beta \leq 3$
2. $(6,4)$: $d[6] + 1 \geq d[4]$, ovvero $3 + 1 \geq 2 + \beta$, ovvero $\beta \leq 2$

Segue che, se il costo dell'arco $(5,4)$fosse un parametro reale β, l'albero individuato sarebbe un albero dei cammini minimi di radice 1 se e solo se $\beta \leq 2$.

3) Si consideri una rete di comunicazione descritta da un grafo orientato $G = (N, A)$, relativa all'invio di dati sensibili. Il nodo sorgente s deve inviare v dati al nodo destinazione t lungo un cammino orientato di G. Per monitorare l'instradamento dei dati in transito, si stabilisce che il cammino da s a t selezionato per l'invio includa almeno due dispositivi di controllo. A tal fine, si individua un sottoinsieme di nodi D candidati per l'installazione di un dispositivo di controllo, che non contiene né s e né t.

Sapendo che a ogni collegamento (i, j) della rete è associata una capacità superiore u_{ij} e un costo di utilizzo c_{ij}, e che l'installazione di un dispositivo di controllo in un nodo $i \in D$ comporta un costo di installazione C_i, si formuli in termini di *PLI* il problema di decidere lungo quale cammino orientato della rete da s a t inviare i dati sensibili in modo da rispettare i vincoli di capacità relativi agli archi utilizzati per l'invio e il vincolo relativo al monitoraggio dei dati, minimizzando il costo totale, dato dalla somma dei costi di utilizzo degli archi e dei costi di installazione dei dispositivi.

SVOLGIMENTO

Introduciamo la famiglia di variabili di progetto binarie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene al cammino selezionato da } s \text{ a } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i,j) \in A.$$

Per garantire il monitoraggio dei dati sensibili, introduciamo inoltre le variabili binarie:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se si installa un dispositivo in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in D.$$

Per esprimere la relazione tra il cammino selezionato e i dispositivi, introduciamo infine le variabili binarie:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ appartiene al cammino selezionato e in esso viene installato un dispositivo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in D.$$

Utilizzando le variabili decisionali precedentemente introdotte, il problema dell'invio dei dati sensibili lungo la rete può essere formulato mediante il seguente modello *PLI*:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in D} C_i y_i & \\
& \displaystyle\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N \\
& v x_{ij} \le u_{ij} & (i,j) \in A \\
& \displaystyle s_i \le \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} & i \in D \\
& s_i \le y_i & i \in D \\
& \displaystyle s_i \ge \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} + y_i - 1 & i \in D \\
& \displaystyle\sum_{i\in D} s_i \ge 2 & \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & (i,j) \in A \\
& y_i, s_i \in \{0,1\} & i \in D
\end{array}$$

Il primo blocco di vincoli è costituito dai vincoli di conservazione di flusso, che garantiscono l'invio dei dati sensibili lungo un cammino orientato di G da s a t. Seguono i vincoli di capacità, che assicurano che lungo ogni arco del cammino selezionato possano essere inviati v dati. I successivi tre blocchi di vincoli garantiscono che le variabili binarie s_i esprimano la relazione logica di tipo *and* tra la proposizione "il nodo i appartiene al cammino selezionato" (che assume il valore vero se e solo se $\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} = 1$) e la proposizione "in i viene installato un dispositivo" (che assume il valore vero se e solo se $y_i = 1$). L'ultimo vincolo garantisce che il cammino da s a t selezionato per l'invio includa almeno due dispositivi di controllo. Infine la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il costo totale di invio e di monitoraggio. Si osservi che, a causa della presenza del vincolo $\displaystyle\sum_{i\in D} s_i \ge 2$, i vincoli $\displaystyle s_i \ge \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} + y_i - 1, i \in D$, potrebbero essere omessi senza compromettere la correttezza della formulazione.