RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

Nome: Cognome:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

per via algebrica mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo, sia quella primale che quella duale, siano uniche. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 3$, $B(h) = 2$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1\} \ ,$$

$$\bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1,2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[soluzione di base primale degenere, soluzione di base duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{5\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_5 = 1 \ , \ k = 5$$

it.3) $B = \{1,5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \end{bmatrix} \ , \ y^T = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \ \text{STOP.}$$

[soluzione di base primale non degenere, soluzione di base duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$, segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (14, 0, 0, 0, 6)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. Analogamente, poiché la soluzione ottima primale individuata è non degenere, segue che $y = (14, 0, 0, 0, 6)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

2) Si consideri il seguente problema di PL, in cui α è un parametro reale:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & (-2-\alpha)x_1 & + & (-2+3\alpha)x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1. \end{array}$$

2.1) Si individui l'insieme di valori di α per cui $B = \{3, 5\}$ è una base ottima per il problema. **2.2)** Fissando $\alpha = 0$, si determini l'insieme delle soluzioni ottime per il duale del problema dato. Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

2.1) Determiniamo la soluzione di base primale corrispondente a $B = \{3, 5\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che tale soluzione è primale ammissibile, in quanto soddisfa i restanti tre vincoli del problema. Determiniamo ora la corrispondente soluzione di base duale in funzione del parametro α:

$$y_B^T = c^T A_B^{-1} = \begin{bmatrix} (-2-\alpha) & (-2+3\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha & 2+\alpha \end{bmatrix}, \; y_N^T = 0, \; y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4\alpha & 0 & 2+\alpha \end{bmatrix}.$$

$B = \{3, 5\}$ è una base duale ammissibile se e solo se $y_B \geq 0$, vale a dire se e solo se $\alpha \in [-2, 0]$. Quindi, $B = \{3, 5\}$ è una base ottima per il problema di PL se e solo se $\alpha \in [-2, 0]$.

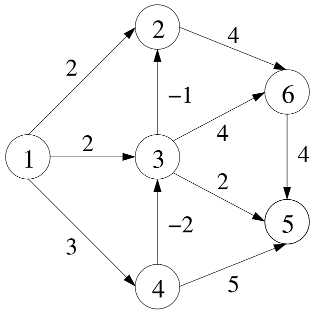
2.2) Nel caso $\alpha = 0$, per quanto sopra mostrato si ha che $B = \{3, 5\}$ è una base ottima. Quindi $(1, 0)$ è una soluzione ottima del problema primale, mentre $(0, 0, 0, 0, 2)$ è una soluzione ottima del corrispondente problema duale. Poiché per $\alpha = 0$ la soluzione ottima primale è degenere, in quanto anche il quarto vincolo risulta attivo, la soluzione $(0, 0, 0, 0, 2)$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima duale.

Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (1, 0)$. Poiché $I(x) = \{3, 4, 5\}$, una soluzione duale y, tale che $y^T A = c^T$, che formi con x una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché y sia ammissibile per il problema duale, essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \quad\;\; y_4 \quad -y_5 = -2 \\ -y_3 \quad -y_4 \quad -y_5 = -2 \\ y_3, \quad y_4, \quad y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Posto $y_4 = \gamma$, il sistema di equazioni ammette soluzioni della forma $(-2\gamma, \gamma, 2 + \gamma)$, le cui componenti sono tutte non negative per il solo valore $\gamma = 0$. Pertanto, $(0, 0, 0, 0, 2)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q, se utilizzato. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato, discutendo la sua eventuale unicità.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

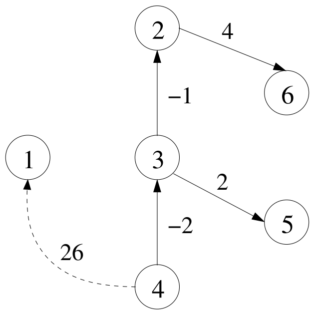
originale	1	2	3	4	5	6
rinumerato	1	4	3	2	6	5

si può verificare che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ anche in presenza di archi di costo negativo. Nello svolgimento si considera l'indicizzazione dei nodi dopo la rinumerazione. Si osservi che l'insieme dei nodi candidati Q non necessita di essere utilizzato.

$$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 5 \times 5 + 1 = 26.$$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$
0		2	*nil*	2	2	2	2	26	0	26	26	26	26
1	2	2	*nil*	2	2	2	2	26	0	−2	26	26	5
2	3	2	*nil*	2	3	3	3	26	0	−2	−3	2	0
3	4	2	*nil*	2	3	4	3	26	0	−2	−3	1	0
4	5	2	*nil*	2	3	4	3	26	0	−2	−3	1	0

L'albero dei cammini minimi individuato, sul grafo originale, risulta quindi:



Si osservi che il nodo 1 non è raggiungibile dal nodo radice 4, come segnalato dal valore 26 della sua etichetta al termine dell'algoritmo. Ciò poteva essere stabilito anche a priori: infatti, dopo la rinumerazione il nodo radice 4 viene rinominato 2, perciò il nodo 1 (la rinumerazione non cambia il suo indice) non è raggiungibile a partire dalla radice in quanto la nuova numerazione garantisce $i < j$ per ogni arco (i, j).

L'albero individuato è l'unico albero dei cammini minimi di radice 4 (considerando la numerazione originale dei nodi) in quanto le condizioni di Bellman per gli archi non appartenenti all'albero sono soddisfatte in forma di disuguaglianza stretta.