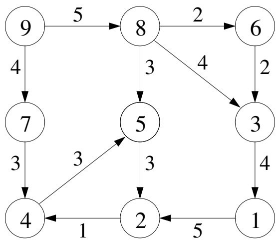
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

Nome: Cognome:

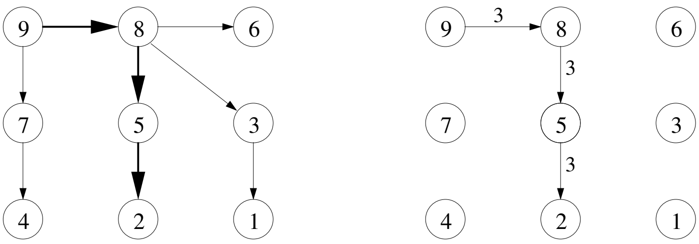
1) Si individui un flusso massimo dal nodo 9 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Per ogni iterazione tranne l'ultima si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Come cambierebbe la capacità del taglio minimo se l'arco $(1,2)$ avesse capacità 4 invece di 5? Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

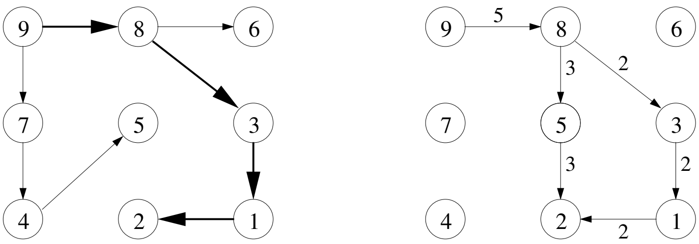
Per ogni iterazione tranne l'ultima viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato. Viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio lungo P di un flusso pari alla capacità del cammino aumentante individuato, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo. Viene anche riportato il corrispondente valore di flusso v.

Iterazione 1



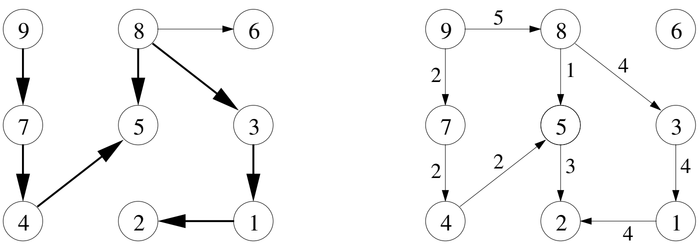
$\theta(P,x) = 3, \quad v = 3$

Iterazione 2



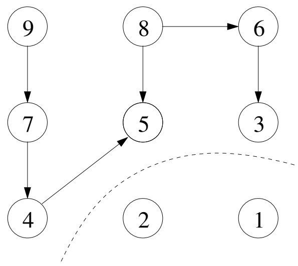
$\theta(P,x) = 2, \quad v = 5$

Iterazione 3



$\theta(P,x) = 2, \quad v = 7$

Iterazione 4



Non esistendo cammini aumentanti, l'ultimo flusso individuato è massimo e il taglio $N_s = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $N_t = \{1, 2\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{52} + u_{31} = 3 + 4 = 7 = v$.

Se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità 4 invece di 5, il flusso massimo individuato continuerebbe a essere un flusso ammissibile. Di conseguenza, la minima capacità dei tagli che separano la sorgente dal pozzo, uguale al valore massimo di flusso, continuerebbe a valere 7.

2) Si consideri il seguente modello matematico:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \max\{\, x_1 - x_2 + 2x_3 \,,\, -x_1 + x_2 + x_3 \,\} \\
& x_1, x_2 \in \{0,1\} \\
& x_3 \in \{0,3,5,11\} \\
& x_1 = 1 \ \mathit{or} \ x_2 = 1 \Longrightarrow x_3 = 11
\end{array}
$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello PLI in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare, bensì è definita come il massimo di due funzioni lineari;
- la variabile x_3 è una variabile a valori discreti;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile x_3 ai valori assunti dalle variabili binarie x_1 e x_2.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello PLI nel modo seguente:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \le z \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \le z \\
& x_3 = 3y_1 + 5y_2 + 11y_3 \\
& y_1 + y_2 + y_3 \le 1 \\
& y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\} \\
& x_1, x_2 \in \{0,1\} \\
& y_3 \ge x_1 \\
& y_3 \ge x_2.
\end{array}
$$

La variabile di soglia z, infatti, permette di stimare per eccesso il massimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $x_1 - x_2 + 2x_3$ e $-x_1 + x_2 + x_3$. Minimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1, x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che minimizzano il massimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie y_1, y_2 e y_3 permettono di formulare la variabile a valori discreti x_3 utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Infine, gli ultimi due vincoli del modello PLI garantiscono che, se $x_1 = 1$ oppure $x_2 = 1$, allora la variabile ausiliaria y_3 sia forzata ad assumere il valore 1, e quindi x_3 assuma il valore 11, come desiderato.

3) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & 16x_1 & +10x_2 & +10x_3 & +6x_4 & +2x_5 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 13 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visitando per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si eseguano solo le prime tre iterazioni dell'algoritmo, inclusa quella corrispondente al nodo radice, specificando il costo della migliore soluzione ottenuta quando l'algoritmo viene interrotto.

Si consideri quindi la disuguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$. Si tratta di un piano di taglio per il problema dato? Giustificare tutte le risposte.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 2/3, 0]$, $\bar{z} = 40$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 38$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 38$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 1, 0]$, $\bar{z} = 39 + 1/2$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 34$. Poiché $\underline{z} = 34 < z = 38$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 39. Poiché $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = \underline{z} = 38$. Il nodo viene pertanto chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

Avendo eseguito tre iterazioni, l'algoritmo Branch and Bound termina anticipatamente. La migliore soluzione individuata nel momento in cui l'algoritmo viene interrotto è $[1, 1, 1, 0, 1]$, di costo 38.

La disuguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$ è un piano di taglio per il problema dato in quanto è una disuguaglianza valida, ovvero è soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato (infatti, gli oggetti 1, 2, 3 e 4 non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino), e inoltre è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema (infatti, $1+1+1+2/3 > 3$).