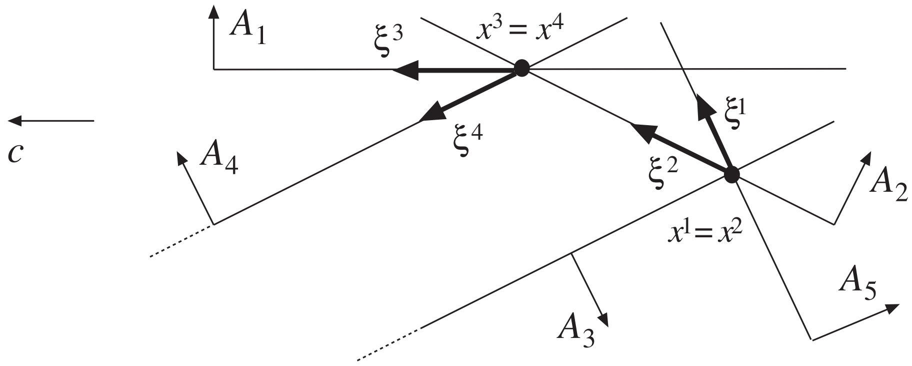
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente il problema di PL in figura per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, partendo dalla base $B = \{3, 5\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle soluzioni di base visitate dall'algoritmo.



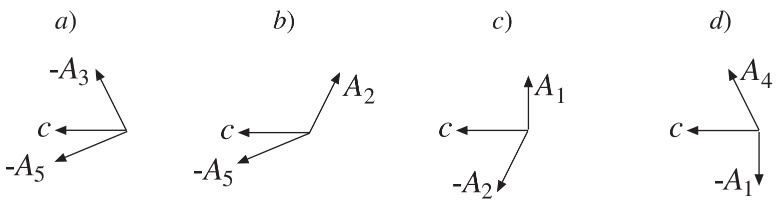
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 5\}$, $y_3 < 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e $-A_5$, come mostrato in figura a). Si ha quindi $h = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. La soluzione di base primale è degenere, in quanto $I(x^1) = \{2, 3, 5\}$, ma duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 2, che è attivo: si esegue quindi un cambio di base degenere, selezionando $k = 2$.

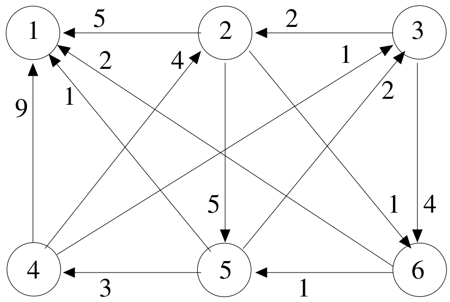
it.2) $B = \{2, 5\}$, $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_5$, come mostrato in figura b). Si ha quindi $h = 5$. La soluzione di base duale è quindi non degenere, mentre quella primale resta degenere in quanto $x^2 = x^1$ implica $I(x^2) = I(x^1)$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1 e 4, e quindi $k = \min\{1, 4\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it.3) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in figura c). Si ha quindi $h = 2$. La soluzione di base duale è non degenere, mentre quella primale è degenere in quanto $I(x^3) = \{1, 2, 4\}$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 4$.

it.4) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_4, come mostrato in figura d), quindi $h = 1$. La soluzione di base duale è quindi non degenere, mentre quella primale resta degenere. Poiché la direzione di crescita ξ^4 individuata dall'algoritmo è una direzione di recessione per il poliedro primale, l'algoritmo termina segnalando che il problema primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il suo problema duale è vuoto.



2) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si riportino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato, discutendo la sua eventuale unicità. Nel caso in cui l'albero individuato non sia unico, si modifichi il costo di un arco del grafo in modo che, per il grafo risultante, l'albero determinato risulti invece l'unico albero dei cammini minimi di radice 4.



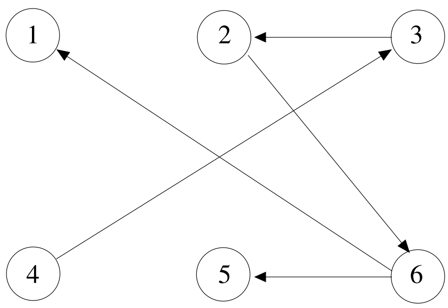
SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo orientato (2, 5, 3)), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo di Dijkstra, cioè l'algoritmo SPT.S in cui l'insieme Q è implementato come una coda di priorità, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 5 \times 9 + 1 = 46.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	Q
0		4	4	4	*nil*	4	4	46	46	46	0	46	46	$\{4\}$
1	4	4	4	4	*nil*	4	4	9	4	1	0	46	46	$\{1,2,3\}$
2	3	4	3	4	*nil*	4	3	9	3	1	0	46	5	$\{1,2,6\}$
3	2	2	3	4	*nil*	2	2	8	3	1	0	8	4	$\{1,5,6\}$
4	6	6	3	4	*nil*	6	2	6	3	1	0	5	4	$\{1,5\}$
5	5	6	3	4	*nil*	6	2	6	3	1	0	5	4	$\{1\}$
6	1	6	3	4	*nil*	6	2	6	3	1	0	5	4	$\emptyset$

L'albero individuato è mostrato in figura.



Tale albero non è l'unico albero dei cammini minimi di radice 4. Infatti, le condizioni di Bellman per l'arco $(5,1)$, non appartenente all'albero, valgono in forma di uguaglianza, e l'inserimento di $(5,1)$ al posto dell'arco $(6,1)$ crea una struttura ad albero. Poiché $(5,1)$ è l'unico arco non appartenente all'albero per cui le condizioni di Bellman valgono in forma di uguaglianza, per rendere tale albero l'unico albero dei cammini minimi di radice 4 basta incrementare il suo costo a un qualsiasi valore maggiore di 1.

3) Logistik S.p.a. deve inviare δ_1 bancali dal sito s_1 al sito t_1, e δ_2 bancali dal sito s_2 al sito t_2, attraverso una rete logistica rappresentata da un grafo orientato $G = (N, A)$, di cui s_1, t_1, s_2 e t_2 sono nodi. Sia l'invio da s_1 a t_1 che l'invio da s_2 a t_2 devono avvenire lungo un unico cammino di G. Per inviare un singolo bancale lungo il collegamento $(i, j) \in A$, Logistik deve pagare un costo di transito c_{ij}. Il budget totale disponibile per gli invii è pari a C.

Si formuli in termini di *PLI* il problema di inviare i δ_1 bancali da s_1 a t_1 e i δ_2 bancali da s_2 a t_2, rispettando il vincolo di budget e in modo tale da minimizzare la massima cardinalità dei cammini utilizzati per l'invio (per cardinalità di un cammino si intende il numero di archi che compongono il cammino).

SVOLGIMENTO

Per descrivere il problema, introduciamo le seguenti variabili di flusso:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se il collegamento } (i,j) \in A \text{ è utilizzato per l'invio da } s_k \text{ a } t_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad (i,j) \in A, \quad k = 1, 2.$$

La richiesta di effettuare entrambi gli invii lungo un unico cammino di G può essere espressa mediante i seguenti vincoli di conservazione di flusso:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1, & \text{se } i = s_k \\ 1, & \text{se } i = t_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad k = 1, 2.$$

Il vincolo di budget può invece essere espresso mediante:

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{2} c_{ij} \delta_k x_{ij}^k \leq C.$$

Volendo minimizzare la massima cardinalità dei cammini utilizzati, definiamo una variabile di soglia z, e introduciamo i vincoli

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^k \leq z, \qquad k = 1, 2,$$

in modo tale che z risulti un'approssimazione superiore della massima cardinalità dei due cammini.

Il problema di Logistik può pertanto essere formulato nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ & \displaystyle\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}^k = \begin{cases} -1, & \text{se } i = s_k \\ 1, & \text{se } i = t_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} & i \in N, \quad k = 1, 2 \\ & \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{2} c_{ij} \delta_k x_{ij}^k \leq C & \\ & \displaystyle\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^k \leq z & k = 1, 2 \\ & x_{ij}^k \in \{0, 1\} & (i,j) \in A, \quad k = 1, 2 \end{array}$$