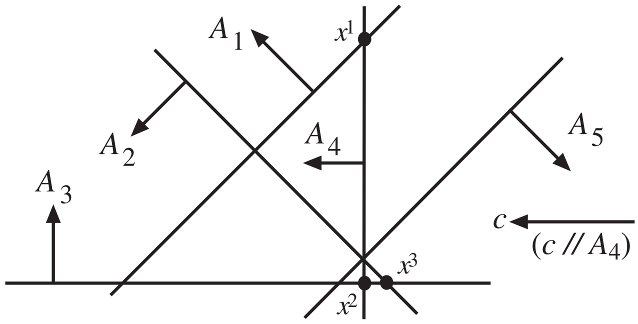
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2024/25)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva per via geometrica il problema di PL rappresentato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si riportino la base, la soluzione di base primale (direttamente in figura), l'indice entrante k, il segno delle componenti dei vettori y_B e η_B, e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, si discuta come cambierebbe la risoluzione dell'algoritmo, e il suo esito, nel caso in cui il vettore A_5 avesse verso opposto rispetto a quello rappresentato in figura. Giustificare tutte le risposte.

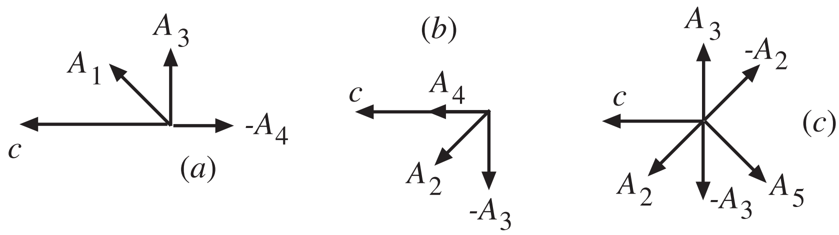


SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $k = 3$, in quanto il terzo vincolo è l'unico violato da x^1; inoltre, $y_1 = 0$, $y_4 > 0$ in quanto c è parallelo ad A_4 e ha lo stesso verso. La base è pertanto duale degenere ma primale non degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 4\}$. Poiché $A_3 \in \text{cono}(A_1, -A_4)$, come mostrato in figura (a), si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_4 < 0$, pertanto $h = 1$. Si noti che, poiché $\bar{\theta} = y_1/\eta_1 = 0$, si effettua un cambio di base duale degenere.

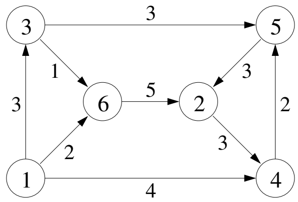
it. 2) $B = \{3, 4\}$: $k = \min\{2, 5\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland; inoltre, $y_3 = 0$, $y_4 > 0$ in quanto c è parallelo ad A_4 e ha lo stesso verso. La base è pertanto duale degenere ma primale non degenere in quanto $I(x^2) = \{3, 4\}$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_4, -A_3)$, come mostrato in figura (b), si ha $\eta_4 > 0$ e $\eta_3 < 0$, pertanto $h = 4$.

it. 3) $B = \{2, 3\}$, $k = 5$, in quanto il quinto vincolo è l'unico violato da x^3; inoltre, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ in quanto $c \in \text{cono}(A_2, A_3)$, come mostrato in figura (c). La base è pertanto duale non degenere ed è pure primale non degenere in quanto $I(x^3) = \{2, 3\}$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(-A_2, -A_3)$, come mostrato in figura (c), l'algoritmo termina in quanto $\eta_B \leq 0$, segnalando che il problema duale è inferiormente illimitato e di conseguenza il problema primale è vuoto.



Nel caso in cui il vettore A_5 avesse verso opposto rispetto a quello rappresentato in figura, le prime due iterazioni dell'algoritmo del Simplesso Duale resterebbero invariate, salvo che $k = \min\{3, 5\} = 3$ nel corso della prima iterazione, e $k = 2$ nel corso della seconda iterazione, senza il ricorso alla regola anticiclo di Bland. Nel corso della terza iterazione, invece, la soluzione di base primale risulterebbe ammissibile, e quindi ottima, per il problema primale. L'algoritmo terminerebbe quindi con esito ottimo finito.

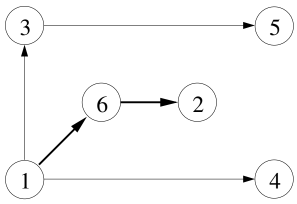
2) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 2 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Durante la ricerca di un cammino aumentante si visitino gli archi della stella uscente del nodo correntemente esaminato secondo l'ordine crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, $(1,2)$ è visitato prima di $(1,3)$). Per ogni iterazione si riportino l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Si discuta, infine, come varierebbe il valore del flusso massimo nel caso in cui la capacità dell'arco $(6,2)$ fosse un parametro reale $\epsilon > 0$.

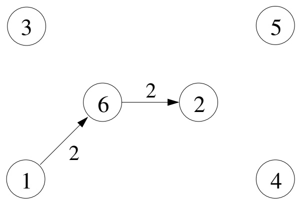


SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato. Viene inoltre riportato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità del cammino aumentante, omettendo per semplicità gli archi a flusso nullo.

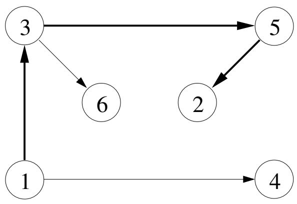
Iterazione 1:

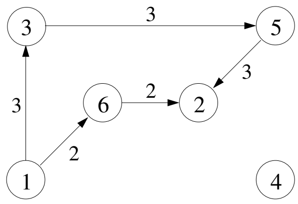




$\theta(P,x) = 2, \quad v = 2$

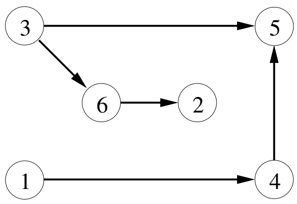
Iterazione 2:

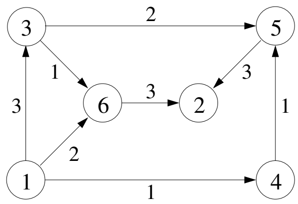




$\theta(P,x) = 3, \quad v = 5$

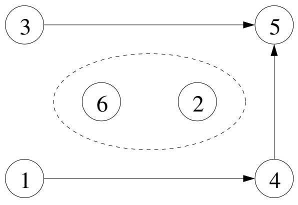
Iterazione 3:





$\theta(P,x) = 1, \quad v = 6$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo e inoltre il taglio individuato dall'algoritmo, definito da $N_s = \{1,3,4,5\}$ e $N_t = \{2,6\}$, è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = u_{16} + u_{36} + u_{52} = 2 + 1 + 3 = 6 = v$.

Se la capacità dell'arco $(6,2)$ fosse un parametro reale $\epsilon > 0$, il flusso individuato dall'algoritmo continuerebbe a essere ammissibile per $\epsilon \geq 3$. Non esistendo cammini aumentanti dalla sorgente al pozzo, pertanto, continuerebbe a essere un flusso massimo. Il valore del flusso massimo sarebbe quindi pari a 6 per $\epsilon \geq 3$. Per $0 < \epsilon < 3$, invece, un taglio di capacità minima sarebbe il taglio che separa l'insieme dei nodi $\{1,3,4,5,6\}$ dal nodo 2, di capacità $3+\epsilon$. Si osservi che l'arco $(6,2)$ è un arco diretto di tale taglio. Pertanto, per $0 < \epsilon < 3$ il valore del flusso massimo sarebbe pari a $3 + \epsilon$.

3) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{rrrrrrcl} \max & 12x_1 & +8x_2 & +10x_3 & +6x_4 & +2x_5 & & \\ & 3x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 11 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound, utilizzando il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, eseguendo il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visitando l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visitando per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti), con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Giustificare tutte le risposte.

Al termine, si proponga un piano di taglio per il problema dato, motivando la risposta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = c^T x^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c^T \bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice: $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 32$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 30$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, $z = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$x_4 = 1$: $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0]$, $\bar{z} = 31$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 28$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$x_4 = 0$: $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 31$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 30$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$x_4 = 1$, $x_3 = 1$: $x^* = [1, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 30 + 2/3$, $\bar{x} = [1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 28$. Poiché i costi sono interi, la valutazione superiore può essere arrotondata per difetto al valore 30, e pertanto il nodo può essere chiuso dalla valutazione superiore, poiché $\bar{z} \leq z$.

$x_4 = 1$, $x_3 = 0$: $x^* = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\bar{z} = 28$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, poiché $\bar{z} < z$.

$x_4 = 0$, $x_5 = 1$: $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1]$, $\bar{z} = 29 + 1/2$. Poiché $\bar{z} < z$, il nodo viene potato dalla valutazione superiore.

$x_4 = 0$, $x_5 = 0$: $x^* = [1, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 30$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità; sarebbe comunque stato chiuso anche dalla valutazione superiore, poiché $\bar{z} \leq z$.

L'algoritmo termina in quanto Q è vuota, restituendo la soluzione ottima $x = [1, 1, 1, 0, 0]$, di valore $z = 30$.

Un possibile piano di taglio è dato dalla disuguaglianza $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$. Si tratta infatti di una disuguaglianza valida, ovvero di una disuguaglianza soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili del problema dato: gli oggetti 1, 2, 3 e 4, infatti, non possono essere inseriti insieme nello zaino in quanto la somma dei loro pesi eccede la capacità dello zaino. Inoltre, è una disuguaglianza violata dalla soluzione ottima del rilassamento continuo del problema: infatti, $1 + 1 + 1 + 1/3 > 3$.