Matematica Computazionale: Laboratorio

I polinomi Osculatori sono polinomi di interpolazione che soddisfano sui nodi condizioni che coinvolgono anche le derivate,

$$p^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots,$$

Usare Matlab® per svolgere i seguenti esercizi.

- Scrivere una funzione `hermite`
  `function a=hermite(x, y, d)`

  dove `x` sono i nodi, `y` i valori che la funzione assume nei nodi e `d` i valori della derivata prima nei nodi. `a` è il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione che soddisfa le condizioni sui nodi per la funzione e la sua derivata.

  Utilizzare il comando Matlab `polyval` per valutare il polinomio ottenuto in altri punti e plottare il grafico del polinomio interpolante. Confrontarlo con il polinomio di interpolazione di Lagrange.

- Una polinomiale a tratti cubica di Hermite è una funzione interpolante $g(x)$ che su ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ coincide con un polinomio di grado 3 si Hermite, cioè

  $$g(x_i) = f(x_i), \quad g'(x_i) = f'(x_i), \text{ per } \quad i = 0, 1, \dots n$$

  e $g_{|_{[x_i,x_{i+1}]}}(x)$ è un polinomio di grado al piú tre.

  Scrivere una funzione `pwhermite`
  `function [v, p]=pwhermite(x,y,d, u)`

  dove `x` sono i nodi di interpolazione, `y` i valori che la funzione assume nei nodi, `d` i valori che la derivata assume nei nodi e `u` i punti sui quali si vuole valutare la funzione interpolante. p é una matrice $n \times 4$ con $n =$`length(x)` tale che $p(i, :)$ contiene i coefficienti del polinomio cubico di Hermite nell'intervallo $[x(i), x(i+1)]$, v sono i i valori che la polinomiale a tratti cubica di Hermite assume nei punti `u`. (Suggerimento: utilizzare la funzione `hermite` costruita al punto precedente.)

- Si consideri la funzione $f(x) = 1/(25 * x^2 + 1)$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Si confronti il comportamente delle seguenti funzioni di interpolazione di f sui nodi $x_i = -1 + i/10$ per $i = 0, \dots, 20$:

1. polinomio di interpolazione di Lagrange;
2. polinomio di interpolazione di Hermite;
3. polinomiale lineare a tratti;
4. polinomiale a tratti cubica di Hermite;
5. la "Shape-preserving" polinomiale a tratti cubica di Hermite implementata dalla funzione `pchip` che non necessita dei valori della derivata.

Con il comando `type pchiptx` analizzare il codice della funzione pchip.

Costruite il polinomio di interpolazione di Lagrange usando come nodi i valori

$$x_i = cos(\theta_i), \quad ,\theta = (2i-1)\pi/40, \quad i = 1 : 20,$$

Cosa succede? Perchè?

- Un'altra classe di funzioni interpolanti polinomiali a tratti cubiche sono le *Splines cubiche*. La funzione interpolante $s(x)$ è tale che

  1. Su ogni $[x_i, x_{i+1}]$ s coincide con un polinomio di grado al piú 3. Denotiamo con $s_i(x) = s_{|_{[x_i,x_{i+1}]}}(x)$ il polinomio di grado al piú tre sull'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, per $i = 0, \ldots, n$.
  2. $s_i(x_i) = f(x_i)$, e $s_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ per $i = 0, 1, \ldots, n-1$;
  3. $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$, per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (garantisce la continuitá della derivata prima della spline nei nodi);
  4. $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$ per $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (garantisce la continuitá della derivata seconda della spline nei nodi);
  5. condizioni iniziali, ad esempio $s''_0(x_0) = s''_{n-1}(x_n) = 0$.

  Chiamare la demo `interpgui` per valutare la differenza delle varie funzioni interpolanti. Quale è la differenza tra `pchip` e `spline`?