

# Esercitazione di Laboratorio di Matematica Computazionale

8 Maggio 2009

In questa esercitazione si vogliono studiare le caratteristiche della soluzione del problema di deconvoluzione fornite dal metodo di Tikhonov. In particolare si vuole studiare la bontà delle soluzioni fornite al variare del parametro di regolarizzazione.

Supponiamo di conoscere esattamente l'immagine  $\mathbf{f}^{(0)}$ , la maschera di blur  $h$ , e di avere una stima del rumore  $\omega$ . Si ha

$$\mathbf{g} = K\mathbf{f}^{(0)} + \omega.$$

Si supponga che  $\omega$  sia un rumore gaussiano bianco con media 0 e varianza  $\sigma = 10^{-3} \max(K\mathbf{f}^{(0)})$ .

Ricordiamo che la norma del rumore è  $\varepsilon = \|\omega\| = \|K\mathbf{f}^{(0)} - \mathbf{g}\|_2$ .

La soluzione di Tikhonov è data dalla soluzione  $\mathbf{f}_\mu$  del sistema delle equazioni normali

$$(K^T K + \mu I)\mathbf{f}_\mu = K^T \mathbf{g}.$$

Il parametro  $\mu$ , detto parametro di regolarizzazione, determina una famiglia di soluzioni che presentano caratteristiche differenti al variare di  $\mu$ . Se la PSF è normalizzata a 1, si può scegliere  $0 < \mu < 0.1$ .

Studiare i seguenti casi:

1. Calcolare e visualizzare  $\mathbf{f}^+ = \mathbf{f}_\mu$  per  $\mu = 0$  nel caso  $\mathbf{g}$  sia affetta da rumore e nel caso ci sia solo "blurring".
2. Calcolare e visualizzare il grafico al variare di  $\mu$  dell'errore di ricostruzione definito da

$$\text{err}_\mu = \frac{\|\mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}^{(0)}\|}{\|\mathbf{f}^{(0)}\|}.$$

Cosa succede per  $\mu \rightarrow 0$  e per  $\mu$  grande?

3. Calcolare e produrre il grafico, al variare di  $\mu$  della discrepanza definita dalla:

$$\varepsilon_\mu = \frac{\|K\mathbf{f}_\mu - \mathbf{g}\|}{\|\mathbf{g}\|}.$$

4. Calcolare e produrre il grafico dell'energia della soluzione

$$E_\mu = \|\mathbf{f}_\mu\|.$$

5. Produrre il grafico (“L-curva”) in scala bilogarithmica dei punti nel piano la cui ascisa corrisponda alla norma della soluzione e l’ordinata alla discrepanza.

Occorre determinare all’interno della famiglia delle possibili soluzioni quella “migliore” e quindi risolvere il problema della scelta del parametro di regolarizzazione.

Metodo di scelta del parametro di regolarizzazione:

1.  $\mu_{\text{opt}}$  che minimizza l’errore di ricostruzione  $\text{err}_\mu$  (è possibile applicare questo metodo solo nel caso di simulazione).
2. Metodo della discrepanza: considerare il valore  $\mu$  per il quale  $\varepsilon_\mu = \varepsilon$ .
3. Metodo dell’energia: considerare il valore di  $\mu$  per il quale  $E_\mu = E$  (con  $E$  valore stimato dell’energia della soluzione  $\mathbf{f}^{(0)}$ ).
4. Metodo di Miller: considerare il valore di  $\mu = \varepsilon^2/E^2$ .
5. Confrontare tra loro i vari valori di  $\mu$  e discutere il risultato.