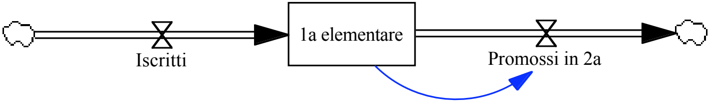
Modellistica ambientale
a.a. 2009/10
I ritardi

I ritardi

Nei modelli di dinamica dei sistemi le catene ed i cicli causali, come abbiamo visto, giocano un ruolo molto importante. La loro presenza rende spesso difficile da prevedere il comportamento di un sistema.
Ciò è tanto più vero dal momento che gli effetti non si verificano immediatamente dopo le azioni che li causano: ci sono molto spesso ritardi nel manifestarsi degli effetti, e ciò può rendere particolarmente difficile da analizzare e spesso controintutitivo il comportamento di un sistema.

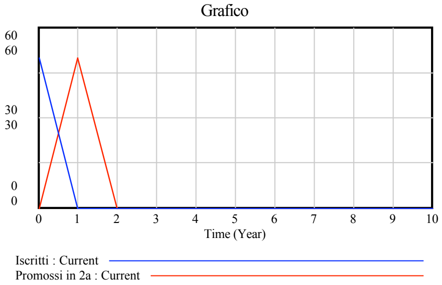
Blocco di ritardo

Un esempio

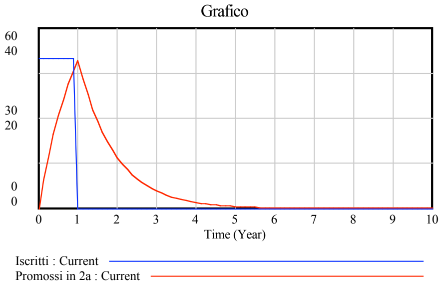


$$1a\_elementare(0) = 0$$
$$Iscritti(0) = 50$$
$$Promossi\_in\_2a(0) = 1a\_elementare(0) = 0$$
$$1a\_elementare(1) = Iscritti(0) - Promossi\_in\_2a(0) = 50$$
$$Promossi\_in\_2a(1) = 1a\_elementare(1) = 50$$

I grafici



$\Delta t = 1$

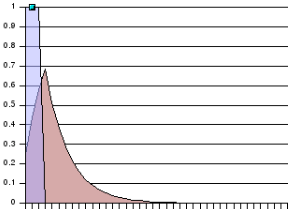


$\Delta t = 0.125$

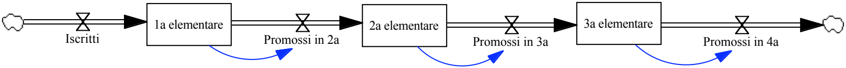
Un esempio

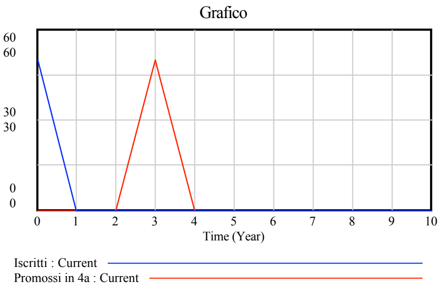
- $Livello(0.25) = Livello(0) + (Input(0) - Output(0))/4 = 0.25$
- $Output(0.25) = Livello(0.25) = 0.25$
- $Livello(0.5) = Livello(0.25) + (Input(0.25) - Output(0.25))/4 = 0.44$
- $Output(0.5) = Livello(0.5) = 0.5$
- $Livello(0.75) = Livello(0.5) + (Input(0.5) - Output(0.5))/4 = 0.58$

Tempo		Input	Livello	Output
0	0,00	1	0	0
	0,25	1	0,25	0,25
	0,50	1	0,44	0,44
	0,75	1	0,58	0,58
1	1,00	0	0,68	0,68
	1,25	0	0,51	0,51
	1,50	0	0,38	0,38
	1,75	0	0,29	0,29
2	2,00	0	0,22	0,22
	2,25	0	0,16	0,16
	2,50	0	0,12	0,12
	2,75	0	0,09	0,09
3	3,00	0	0,07	0,07
	3,25	0	0,05	0,05
	3,50	0	0,04	0,04
	3,75	0	0,03	0,03
4	4,00	0	0,02	0,02
	4,25	0	0,02	0,02
	4,50	0	0,01	0,01
	4,75	0	0,01	0,01
5	5,00	0	0,01	0,01
	5,25	0	0,01	0,01
	5,50	0	0	0
	5,75	0	0	0
6	6,00	0	0	0



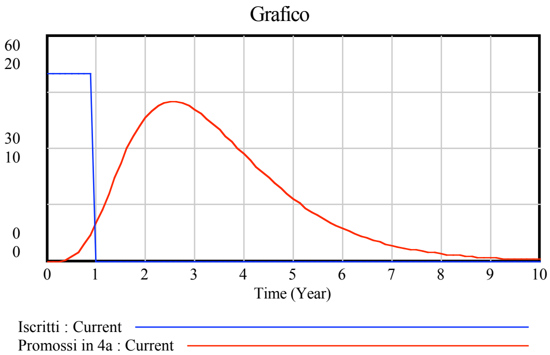
Due ulteriori livelli





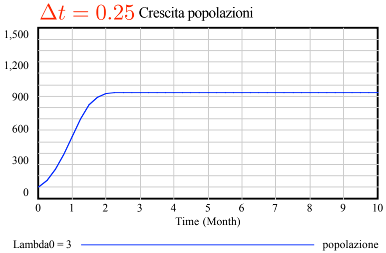
$$\Delta t = 1$$

Δt ridotto, tre livelli



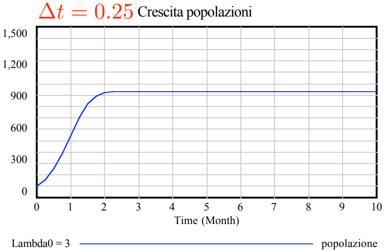
$$\Delta t = 0.125$$

A volte l'uso di intervalli di tempo Δt grandi (ad esempio 1) porta a notevoli errori di approssimazione ed a risultati privi di senso. In questi casi è necessario ricorrere ad intervalli di tempo più piccoli. Un esempio è dato dal caso già visto della crescita in presenza di risorse limitate.



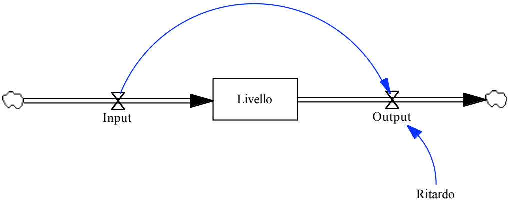
Possibili problemi

A volte l'uso di intervalli di tempo Δt grandi (ad esempio 1) porta a notevoli errori di approssimazione ed a risultati privi di senso. In questi casi è necessario ricorrere ad intervalli di tempo più piccoli. Un esempio è dato dal caso già visto della crescita in presenza di risorse limitate.

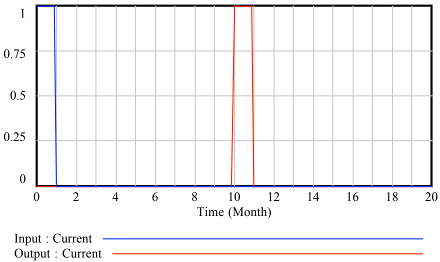


Ci si può trovare di fronte ad esigenze contrastanti: alcune componenti del modello richiedono intervalli Δt grandi mentre altre richiedono invece una tempificazione più fine.

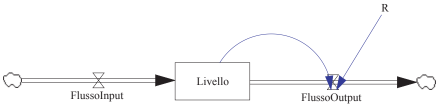
Ritardo pipeline



$$Output(t) = DELAYFIXED(Input, Ritardo, Valoreiniziale)$$
$$[= Input(t - Ritardo)]$$



$\Delta t = 0.125$



$$\frac{dL(t)}{dt} + \frac{L(t)}{R} = I(t)$$

$$e^{\frac{t}{R}}\frac{dL(t)}{dt} + e^{\frac{t}{R}}\frac{L(t)}{R} = e^{\frac{t}{R}}I(t)$$

$$\frac{d[e^{\frac{t}{R}}L(t)]}{dt} = e^{\frac{t}{R}}I(t)$$

$$\int_0^t \frac{d[e^{\frac{s}{R}}L(s)]}{ds}ds = \int_0^t e^{\frac{s}{R}}I(s)ds$$

$$e^{\frac{t}{R}}L(t) - L(0) = \int_0^t e^{\frac{s}{R}}I(s)ds \Rightarrow L(t) = L(0)e^{-\frac{t}{R}} + e^{-\frac{t}{R}}\int_0^t e^{\frac{s}{R}}I(s)ds$$

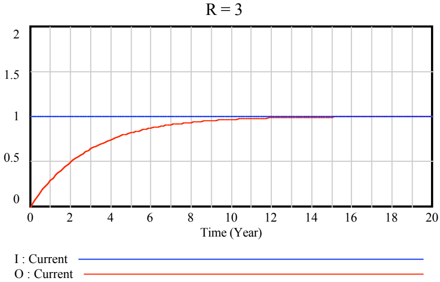
Ritardo esponenziale (2)

$$L(t) = L(0)e^{-\frac{t}{R}} + e^{-\frac{t}{R}} \int_0^t e^{\frac{s}{R}} I(s)ds$$

Caso 1: $I(t) = 1, t \in [0, +\infty)$ con $L(0) = 0$

$$\int_0^t e^{\frac{s}{R}} I(s)ds = R(e^{\frac{t}{R}} - 1)$$

$$L(t) = L(0)e^{-\frac{t}{R}} + R(1 - e^{-\frac{t}{R}}) \overset{L(0)=0}{\Rightarrow} L(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{R}})$$



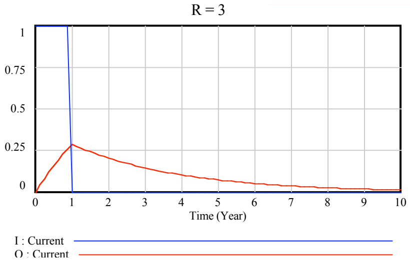
Ritardo esponenziale (3)

$$L(t) = L(0)e^{-\frac{t}{R}} + e^{-\frac{t}{R}} \int_0^t e^{\frac{s}{R}} I(s)ds$$

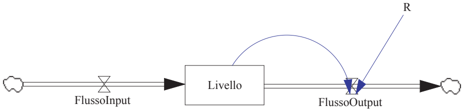
$$\textbf{Caso 2:} I(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1] \\ 0, t > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^t e^{\frac{s}{R}} I(s)ds = \begin{cases} R(e^{\frac{t}{R}} - 1) & t \in [0,1] \\ R(e^{\frac{1}{R}} - 1) & t > 1 \end{cases}$$

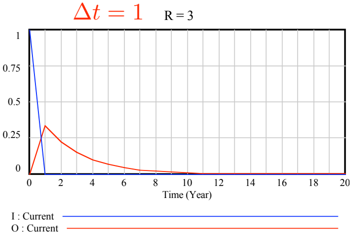
$$L(0) = 0 \Rightarrow L(t) = \begin{cases} R(1 - e^{-\frac{t}{R}}) & t \in [0,1] \\ R(e^{-\frac{t-1}{R}} - e^{-\frac{t}{R}}) & t > 1 \end{cases}$$

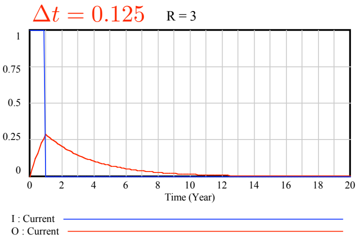


Ritardo esponenziale del primo ordine

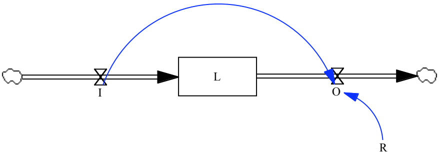


Output(t)=DELAY1I(Input, Ritardo, Valore iniziale)



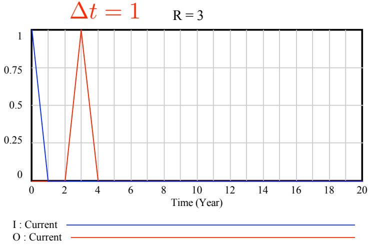


Ritardo esponenziale del terzo ordine (1)

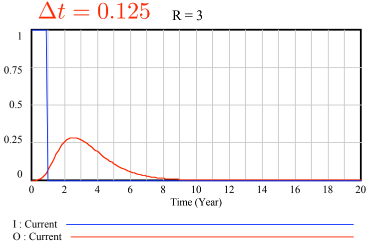


Output(t)=DELAY3I(Input, Ritardo, Valore iniziale)

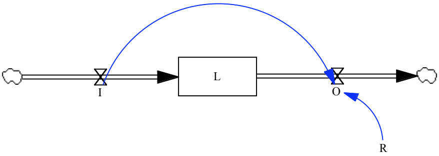
$\Delta t = 1$



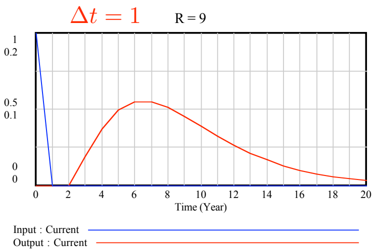
$\Delta t = 0.125$

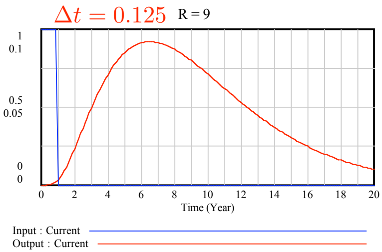


Ritardo esponenziale del terzo ordine (2)



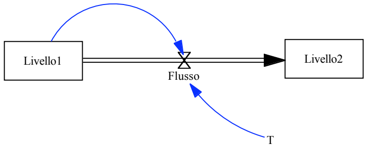
Output(t)=DELAY3I(Input, Ritardo, Valore iniziale)





Flussi di materiale (1)

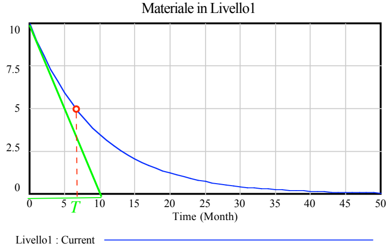
Consideriamo un sistema in cui ci siano due livelli ed un flusso di materiale dal primo al secondo. Sia T il tempo medio di permanenza del materiale nel primo livello, allora $1/T$ è il tasso di trasferimento, cioè la quantità di materiale che passa dal **Livello 1** al **Livello 2** nell'unità di tempo.



$$Flusso(t) = \frac{1}{T} \times Livello1(t)$$

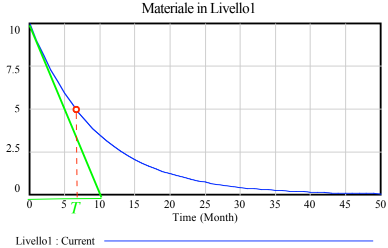
- $Livello1(t) = Livello1(0) \times e^{-\frac{t}{T}}$
- $Livello1(t) = \frac{Livello1(0)}{2}$
- $e^{-\frac{t}{T}} = \frac{1}{2}$
- $\frac{t}{T} = -ln\frac{1}{2}$
- $t^* = T \times ln2 = 0.693 \times T \Rightarrow T = 1.443t^*$

con t^* tempo di dimezzamento



- $Livello1(t) = Livello1(0) \times e^{-\frac{t}{T}}$
- $Livello1(t) = \frac{Livello1(0)}{2}$
- $e^{-\frac{t}{T}} = \frac{1}{2}$
- $\frac{t}{T} = -ln\frac{1}{2}$
- $t^* = T \times ln2 = 0.693 \times T \Rightarrow T = 1.443t^*$

con t^* tempo di dimezzamento



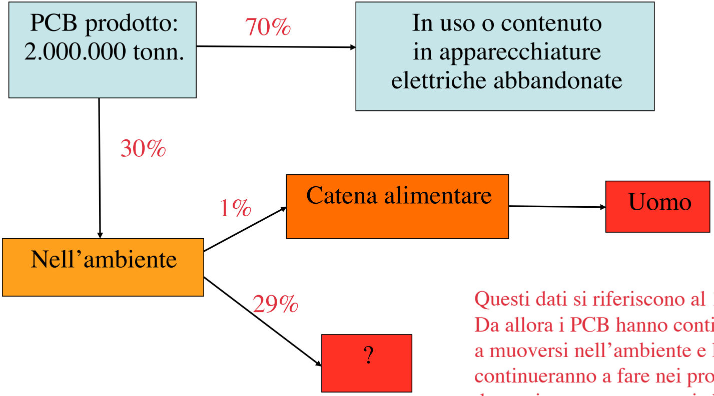
$\frac{dLivello1(0)}{dt} = -\frac{1}{T}Livello1(0)$
$y = Livello1(0) - \frac{1}{T}Livello1(0)x$
$y = 0 \Rightarrow x = T$

Ritardi: il caso del PCB(1)

I PCB (PolyChlorinated Biphenyls) sono materiali chimici, stabili, oleosi, non infiammabili, usati principalmente per il raffreddamento di componenti elettriche, capacità e trasformatori.
Dal 1929 sono stati prodotti circa 2 milioni di tonnellate di PCB , eliminati dopo l'uso indiscariche nel terreno, nelle fogne o anche in acqua. Nel 1966 uno studio sulla diffusione del DDT nell'ambiente portò a scoprire anche la presenza dei PCB in praticamente ogni componente dell'ecosistema, dall'atmosfera alla catena del cibo. La maggior parte dei PCB sono poco solubili in acqua, ma solubili nei grassi ed hanno una vita molto lunga. Si muovono lentamente nel terreno e in acqua, fino a che non si inseriscono in qualche forma di vita, dove si accumulano nei tessuti grassi ed aumentano in concentrazione man mano che si muovono in alto nella catena alimentare. Si trovano in pesci carnivori, uccelli e mammiferi marini, nei grassi umani ed anche nel latte umano.
Interferiscono col sistema immunitario ed endocrino, in particolare con la riproduzione e lo sviluppo del feto.

Negli anni '70 la loro produzione e il loro uso sono stati proibiti in molti paesi.

Ritardi: il caso del PCB(2)

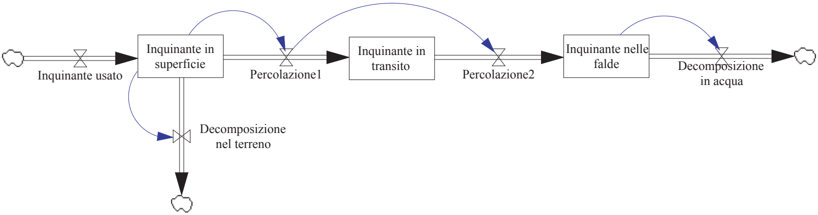


Questi dati si riferiscono al 1990. Da allora i PCB hanno continuato a muoversi nell'ambiente e lo continueranno a fare nei prossimi decenni: una vera e propria bomba a tempo!

Ritardi: il caso del DCPe (1-2 Dicloropropene)

In Olanda, fra gli anni 1960 e 1990, fu abbondantemente usato, nelle coltivazioni di patate e di bulbi, un disinfettante del suolo, il DCPe (1-2 Dicloropropene) contenente un inquinante, il 1-2 Dicloropropano (DCPa), che ha una vita molto lunga e filtra nel terreno fino a raggiungere, dopo molto tempo (alcuni decenni) le falde acquifere, inquinandole. Pertanto anche se l'uso del DCPe è stato bandito nel 1990, ci si aspetta nei prossimi anni un inquinamento molto consistente (superiore ai livelli accettabili) delle falde.

Un semplice modello di diffusione di inquinanti



Effetti dei ritardi